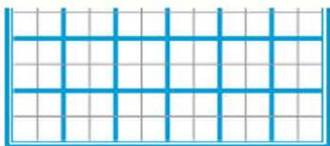




МГУ-школе



Математика



6 класс

**Учебник
для общеобразовательных
организаций**

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

14-е издание

Москва
«Просвещение»
2015

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
М34

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов,
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены положительные экспертные заключения по результатам научной (заключение РАН № 10106-5215/587 от 14.10.11), педагогической (заключения РАО № 01-5/7д-335 от 17.10.11 и № 282 от 29.01.14) и общественной (заключение РКС № 314 от 07.02.14) экспертиз.

Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / М34 [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 14-е изд. — М.: Просвещение, 2015. — 256 с. : ил. — (МГУ — школе.) — ISBN 978-5-09-033716-8.

Данный учебник является заключительной частью двухлетнего курса математики для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и переработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования. В доработанном варианте в системе упражнений выделены специальные рубрики по видам деятельности. Также специально выделены задания для устной работы, задачи на построение, старинные задачи и задачи повышенной трудности. Каждая глава учебника дополнена историческими сведениями и интересными занимательными заданиями.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-09-033716-8

© Издательство «Просвещение», 2012
© Художественное оформление.
© Издательство «Просвещение», 2012
Все права защищены

Дорогие шестиклассники!

В этом году вы продолжите изучение математики. Вам предстоит познакомиться с элементами геометрии, связанными с симметриями фигур относительно точки, прямой и плоскости. Вы изучите целые числа, рациональные числа и правила действий с ними, свойства этих действий, а также наиболее распространённые на практике десятичные дроби.

Весь материал учебника разбит на 5 глав, в каждой главе имеется несколько пунктов, содержащих теоретические сведения и практические упражнения. Новые термины (слова и словосочетания) и важные факты выделены в тексте **жирным шрифтом**. Правила и свойства, которые полезно запомнить, даны на цветном фоне или в рамочке — см. с. 5.

Каждая глава имеет дополнения. Материал первого пункта дополнений позволяет расширить знания, полученные при изучении главы, и научиться решать более сложные задачи. В исторических сведениях приведена информация, дополняющая изученное в главе, рассказывающая о развитии математики и об учёных-математиках. В пункте «Занимательные задачи» приведены задания, умение решать которые поможет успешному участию в различных конкурсах и олимпиадах.

В конце учебника имеется раздел «Задания для повторения», в котором собраны упражнения на вычисления и текстовые задачи. Здесь имеется много исторических задач и заданий из старинных учебников и сборников задач, применявшихся при обучении ваших сверстников в давние времена. К некоторым задачам и упражнениям в учебнике приведены ответы (с. 251).


Если вы хотите учиться успешно, то с вниманием относитесь к тому, что написано в учебнике и объясняет учитель, к выполнению домашних заданий.

Перед выполнением домашнего задания обязательно прочитайте заданный на дом пункт учебника, вспомните объяснение учителя. Это позволит вам подготовиться к выполнению упражнений и решению задач. Ответьте на вопросы, идущие после учебного текста, а в случае затруднения найдите ответы в тексте учебника. Объяснение того или иного термина ищите в предметном указателе (с. 250). Там они выписаны в алфавитном порядке.


Особое внимание уделите решению текстовых задач. В 6 классе они решаются не только арифметическими способами, но и с помощью уравнений.

При выполнении заданий обращайте внимание на специальные значки рядом с номером упражнения. Они имеют следующие значения:

 **8.** — задания для устной работы,

 **38.** — задания повышенной трудности,

 **40.** — старинные задачи,

 **408.** — задачи на построение.

Лучшему усвоению изученного поможет использование рабочей тетради, быстро проверить усвоение материала можно с помощью сборника тестов, а в дидактических материалах содержатся задания для самостоятельных и контрольных работ. В учебный комплект с нашим учебником входит ещё одна книга — «Задачи на смекалку». В ней имеется много задач, решая которые можно лучше усвоить изучаемый материал и хорошо подготовиться к конкурсам и олимпиадам.

Желаем вам успехов в изучении математики!

Авторы

ОТНОШЕНИЯ, ПРОПОРЦИИ, ПРОЦЕНТЫ

При изучении главы 1 вы познакомитесь с понятиями отношения, прямой и обратной пропорциональностей, процента. Вы научитесь решать текстовые задачи на прямую и обратную пропорциональность, на деление числа в данном отношении и на проценты. Умение решать эти задачи поможет вам не только справляться с практическими ситуациями, но и с успехом выполнять задания различных конкурсов, олимпиад и экзаменов. Вы также узнаете, что такое масштаб. Это поможет вам на уроках географии, истории и других школьных предметов.

1.1. Отношения чисел и величин

Частное двух не равных нулю чисел a и b называют ещё **отношением чисел a и b** . Числа a и b называют членами отношения.

Например, $8 : 2$, или $\frac{8}{2}$, есть отношение числа 8 к числу 2;

$\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$ есть отношение $\frac{1}{3}$ к $\frac{1}{5}$.

Из основного свойства частного следует свойство отношения.

Отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю:

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c), \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \text{ где } c \neq 0.$$

Частное двух величин называют **отношением** этих величин. Сами величины называют **членами отношения**.

Отношение величин одного наименования (длины, скоростей, стоимостей и т. д., выраженных одинаковыми единицами измерения) есть **число**. Такие величины называют **однородными**. Например,

$$а) \frac{5 \text{ км}}{3 \text{ км}} = \frac{5 \cdot 1 \text{ км}}{3 \cdot 1 \text{ км}} = \frac{5}{3}, \text{ короче } \frac{5 \text{ км}}{3 \text{ км}} = \frac{5}{3};$$

$$б) \frac{2 \text{ дм}}{1 \text{ см}} = \frac{2 \cdot 10 \text{ см}}{1 \text{ см}} = 20.$$

Отношение величин разных наименований (пути и времени, стоимости товара и его количества, массы тела и его объёма и т. д.) есть **новая величина**.

Например: а) отношение пути (5 км) к времени (3 ч) есть новая величина — **скорость**, выраженная в единицах скорости $\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$:

$$\frac{5 \text{ км}}{3 \text{ ч}} = \frac{5}{3} \cdot 1 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{5}{3} \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

б) отношение массы тела (520 кг) к его объёму (2 м³) есть новая величина — **плотность вещества**, выраженная в единицах плотности $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$: $\frac{520 \text{ кг}}{2 \text{ м}^3} = 260 \cdot 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 260 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

в) отношение массы вещества (например, 12 кг соли) к объёму раствора (3 м³) есть новая величина — **концентрация раствора**, она выражается в единицах концентрации $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$: $\frac{12 \text{ кг}}{3 \text{ м}^3} = 4 \cdot 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Даже знакомая нам величина — **цена** есть отношение стоимости товара к его массе или количеству единиц товара. Например, если за 2 кг товара заплатили 100 р., то его цена равна $\frac{100 \text{ р.}}{2 \text{ кг}} = 50 \frac{\text{р.}}{\text{кг}}$, если за 3 одинаковые книги заплатили 240 р., то цена одной книги равна $\frac{240 \text{ р.}}{3 \text{ шт.}} = 80 \frac{\text{р.}}{\text{шт.}}$.

Знаменатель в единицах цены обычно не пишут, а пишут и говорят: «цена 1 кг товара 50 р.» и «цена одной книги 80 р.».

Обозначения единиц скорости $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $\frac{\text{м}}{\text{мин}}$, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и др. часто пишут с наклонной чертой: км/ч, м/мин, м/с, ...



Что называют:

- а) отношением числа a к числу b ; б) членами отношения?
Приведите примеры.

- 2.** Чем является отношение величин:
а) одного наименования; б) разных наименований?
Приведите примеры.
- 3.** Используя слово «отношение», прочитайте запись:
а) $7 : 2$; б) $\frac{3}{5}$; в) $1 : 5$; г) $\frac{1}{6}$.
- 4.** Запишите отношение, назовите его члены:
а) 7 к 3 ; б) 5 к 9 ; в) 12 к 4 ; г) 10 к 1000 .
- 5.** Найдите отношение:
а) 3 к $\frac{1}{2}$; б) 5 к $\frac{10}{13}$; в) $\frac{7}{8}$ к $\frac{21}{32}$; г) $\frac{12}{17}$ к $\frac{48}{51}$.
- 6.** Прочитайте отношение, назовите его члены, упростите отношение с помощью свойства отношения:
а) $40 : 50 = 4 : 5$; б) $99 : 18$; в) $450 : 250$; г) $720 : 81$.
- В чём заключается свойство отношения?
- 7.** Запишите отношение в виде дроби (там, где можно, упростите отношение):
а) $3 : 5$; б) $49 : 28$; в) $35 : 700$; г) $5 : 7$; д) $520 : 460$; е) $27 : 81$.
- 8.** Можно ли выразить натуральное число отношением:
а) $40 : 20$; б) $30 : 60$; в) $1000 : 100$;
г) $600 : 30$; д) $20 : 40$; е) $100 : 1000$?
- 9.** Замените отношение дробных чисел равным ему отношением натуральных чисел по образцу:

$$а) \frac{1}{2} : \frac{1}{3}. \text{ I способ. } \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}.$$

II способ. Умножим каждый член отношения на 6:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{6}{2} : \frac{6}{3} = 3 : 2.$$

$$б) \frac{1}{4} : \frac{1}{5}; \quad в) \frac{3}{7} : \frac{4}{5}; \quad г) \frac{2}{5} : \frac{3}{7}; \quad д) \frac{12}{17} : \frac{1}{2}; \quad е) 1\frac{1}{2} : \frac{3}{8}; \quad ж) 2\frac{1}{2} : 1\frac{2}{3}.$$

Упростите отношение величин (10–11):

10. а) $\frac{35 \text{ м}}{28 \text{ м}}$; б) $\frac{45 \text{ кг}}{36 \text{ кг}}$; в) $\frac{420 \text{ км}}{720 \text{ км}}$; г) $\frac{450 \text{ т}}{540 \text{ т}}$; д) $\frac{320 \text{ ч}}{48 \text{ ч}}$; е) $\frac{480 \text{ мин}}{840 \text{ мин}}$.

11. а) $\frac{12 \text{ м}}{15 \text{ дм}}$; б) $\frac{18 \text{ кг}}{540 \text{ г}}$; в) $\frac{490 \text{ см}}{35 \text{ дм}}$;
г) $\frac{450 \text{ кг}}{2 \text{ т}}$; д) $\frac{3500 \text{ см}^3}{21 \text{ дм}^3}$; е) $\frac{9900 \text{ дм}^3}{18 \text{ м}^3}$.

12. Упростите отношение величин по образцу:

$$а) \frac{350 \text{ км}}{5 \text{ ч}} = \frac{350 \text{ км}}{5} \cdot \frac{1}{\text{ч}} = 70 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

б) $\frac{720 \text{ км}}{8 \text{ ч}};$ в) $\frac{360 \text{ м}}{3 \text{ мин}};$ г) $\frac{420 \text{ кг}}{4 \text{ м}^3};$

д) $\frac{2250 \text{ кг}}{3 \text{ м}^3};$ е) $\frac{720 \text{ м}}{20 \text{ с}};$ ж) $\frac{450 \text{ г}}{5 \text{ см}^3}.$

13. Найдите пройденный путь s , если известны скорость v и время t равномерного движения:

а) $v = 2 \text{ м/с}, t = 3 \text{ с};$ б) $v = 2 \text{ м/с}, t = \frac{1}{20} \text{ мин}.$

14. Найдите скорость равномерного движения v , если известны пройденный путь s и время движения t :

а) $s = 6 \text{ м}, t = 3 \text{ с};$ б) $s = 6 \text{ м}, t = \frac{1}{20} \text{ ч}.$

15. Скорость пешехода $5\frac{1}{5}$ км/ч. Найдите путь, пройденный пешеходом:

а) за 2 ч; б) за $1\frac{1}{2}$ ч; в) за 45 мин; г) за 125 мин.

16. Расстояние в $1\frac{1}{2}$ км пешеход прошёл за 20 мин. Найдите скорость пешехода. Ответ запишите в следующих единицах:

а) км/ч; б) км/мин; в) м/ч; г) м/мин; д) м/с.

17. Скорость легковой автомашины 72 км/ч. Какой путь она проедет за: а) $\frac{2}{3}$ ч; б) 45 мин; в) 50 мин; г) 165 мин?

18. Скорость легковой автомашины 1200 м/мин. За сколько часов машина проедет:

а) 144 км; б) 36 км; в) 8 км; г) 54 км?

19. Найдите скорость автомашины, если 80 км она проезжает:

а) за 1 ч; б) за $\frac{4}{5}$ ч; в) за $\frac{4}{3}$ ч; г) за $\frac{8}{7}$ ч;

д) за 50 мин; е) за 65 мин; ж) за 90 мин; з) за 100 мин.

***20.** Два конькобежца одновременно стартовали на дистанцию 10 000 м по замкнутой дорожке, длина которой равна 400 м. Скорость первого конькобежца 20 км/ч, а скорость второго 21 км/ч. Обгонит ли второй конькобежец первого на круг до конца дистанции? А на два круга?

1.2. Масштаб

Рисуя на бумаге изображения предметов, мы чаще всего вынуждены изменять их настоящие размеры. Чтобы изображения поместились на листе бумаги, большие предметы приходится изображать в уменьшенном виде, а маленькие — увеличивать. Но рисунок, или чертёж, или план участка должен давать представление о настоящих размерах предметов. На чертежах и планах делают специальную запись, показывающую отношение длины отрезка на чертеже к его настоящей длине.

Например, если на плане комнаты отрезком в 1 см изображён отрезок, настоящая длина которого равна 2 м, то пишут:

в 1 см 2 м, или в 1 см 200 см, или 1 : 200.

Отношение длины отрезка на плане к его настоящей длине называют **масштабом**.

При одинаковых единицах измерения размеров предметов и их изображений масштаб выражается отношением чисел.

В приведённом выше примере масштаб равен 1 : 200.

Масштаб, выраженный отношением чисел, называют **численным масштабом**. Для географических карт (рис. 1) численный масштаб



Масштаб 1:25 000
в 1 сантиметре 250 метров
м 250 0 250 500 м

Рис. 1

выражают дробью, числитель которой равен 1, а знаменатель — числу, показывающему, во сколько раз любое расстояние на карте меньше соответствующего расстояния на местности.

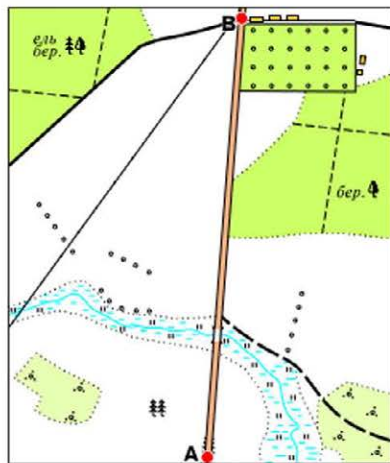
Например, записи

$$\frac{1}{25\,000} \text{ и } 1 : 25\,000$$

означают, что 1 см на карте соответствует 25 000 см на местности.

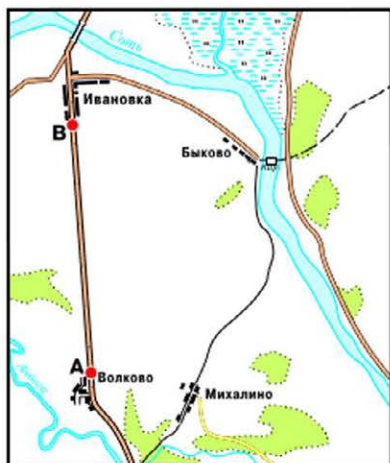
Измерения на местности проводят в метрах или километрах. Для удобства нередко на карте изображают отрезок и указывают соответствующее ему расстояние в метрах или километрах.

- 21.** Что показывает численный масштаб:
а) 1 : 100; б) 1 : 1000; в) 1 : 20 000?
- 22.** Определите численный масштаб, если известно, что 1 см на плане (географической карте) изображает отрезок длиной:
а) 10 см; б) 50 см; в) 6 дм; г) 10 м;
д) 100 м; е) 1 км; ж) 6 км; з) 10 км.
- 23.** Расстояние между двумя городами равно 200 км. Определите расстояния между изображениями этих городов на карте, если численный масштаб карты равен:
а) 1 : 1 000 000; б) 1 : 200 000; в) $\frac{1}{5\,000\,000}$.
- 24.** Масштаб карты равен $\frac{1}{50\,000}$. Определите расстояние на местности, если на карте оно равно:
а) 1 см; б) 5 см; в) 22 см; г) 37 мм; д) $1\frac{1}{5}$ дм; е) 146 мм.
- 25.** План комнаты имеет вид прямоугольника со сторонами 40 мм и 31 мм. Определите длину и ширину комнаты, если численный масштаб плана 1 : 200.
- 26.** Огород имеет вид прямоугольника, длина которого 340 м, а ширина 220 м. Какие размеры будет иметь изображение этого огорода на плане, выполненном в масштабе 1 : 500?
- 27.** Прямоугольник со сторонами 12 см и 6 см изображает на плане поле, занятое под овёс. Определите масштаб плана, если большая сторона поля имеет длину 360 м. Определите меньшую сторону поля.
- 28.** Используя план местности (рис. 2), определите:
а) расстояние от *A* до *B*;
б) расстояния от *A* и от *B* до моста через реку;
в) расстояние от *B* до смешанного леса.



Масштаб 1:10 000

Рис. 2



Масштаб 1:100 000

Рис. 3

- 29.** За сколько часов туристы преодолют расстояние от А до В (рис. 3), если будут двигаться со скоростью:
а) 5 км/ч; б) 4 км/ч?

30. Начертите план класса в масштабе 1 : 100.

- 31.** а) Начертите план своей комнаты в масштабе 1 : 50.
б) Начертите план школьного здания в масштабе 1 : 250.

32. Можно ли начертить план здания (прямоугольной формы в основании) длиной 50 м и шириной 20 м на странице тетради, если использовать масштаб 1 : 50? Какой масштаб следует использовать, чтобы план поместился на странице тетради?

33. На рисунке 4 изображён комар в масштабе 4 : 1. Определите истинную длину крыла комара.

- 34.** Определите, увеличен или уменьшен предмет, если он изображён в масштабе:

- а) 1 : 100; б) 10 : 1;
в) 1 : 20; г) 4 : 1.



Рис. 4

Придумываем задачу

- 35.** На материале других школьных предметов придумайте две задачи с использованием масштаба и решите их.

1.3. Деление числа в данном отношении

Рассмотрим деление числа в данном отношении на конкретном примере. Пусть требуется разделить между двумя друзьями 60 конфет в отношении 2 : 3.

Если считать, что 60 конфет составляют $2 + 3 = 5$ частей, то на одну часть приходится $60 : 5 = 12$ конфет.

Но тогда на две части приходится $12 \cdot 2 = 24$ конфеты, а на три части приходится $12 \cdot 3 = 36$ конфет.

Следовательно, конфеты между друзьями надо разделить так: первому дать 24 конфеты, а второму — 36 конфет.

Запишем решение этой задачи иначе:

$$1) \frac{60}{2+3} \cdot 2 = 24; \quad 2) \frac{60}{2+3} \cdot 3 = 36.$$

Таким образом, чтобы разделить число 60 в отношении 2 : 3, можно разделить число 60 на сумму членов отношения $2 + 3$ и результат умножить на каждый член отношения.

По такому правилу можно разделить любое число в данном отношении. Например, разделим число c ($c \neq 0$) в отношении $a : b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Получим два числа $\frac{c \cdot a}{a+b}$ и $\frac{c \cdot b}{a+b}$.

Задача 1. Два брата сложили свои деньги для покупки акций. Старший брат внёс 500 р., а младший — 300 р. Через некоторое время они продали акции за 1000 р. Как они должны разделить эти деньги между собой?

Решение. Естественно разделить 1000 р. в том отношении, в котором они вложили деньги, т. е. в отношении 500 : 300, или 5 : 3.

Поэтому надо дать:

$$1) \text{ старшему брату } \frac{1000}{5+3} \cdot 5 = 625 \text{ (р.);}$$

$$2) \text{ младшему брату } \frac{1000}{5+3} \cdot 3 = 375 \text{ (р.).}$$

Ответ: старшему брату — 625 р., младшему — 375 р.

Задача 2. Трое хотят купить дом, в котором 13 комнат, за 26 000 р. Первый желает иметь 6 комнат, второй — 4, третий — 3. Сколько денег должен внести каждый из них?

Решение. Естественно, что каждый из них должен внести сумму, соответствующую количеству комнат, которые он желает иметь (будем считать, что комнаты равноценные).

Сумма, которую внесёт первый, должна составить 6 частей, второй — 4 части, третий — 3 части. Говорят, что надо разделить 26 000 р. в отношении 6 : 4 : 3. Поэтому:

1) $\frac{26\,000}{6+4+3} \cdot 6 = 12\,000$ (р.) — сумма первого;

2) $\frac{26\,000}{6+4+3} \cdot 4 = 8\,000$ (р.) — сумма второго;

3) $\frac{26\,000}{6+4+3} \cdot 3 = 6\,000$ (р.) — сумма третьего.

Ответ: первому надо внести 12 000 р., второму — 8000 р., третьему — 6000 р.

Заметим, что последнее действие в приведённых выше решениях можно упростить, найдя ответ вычитанием. ●

Задача 3. Первая машинистка может перепечатать 90 страниц за 10 ч, вторая — за 15 ч. Как распределить между ними 90 страниц, чтобы они перепечатали их в кратчайший срок?

Решение.

1) Сколько страниц печатает первая машинистка за 1 ч?

$$90 : 10 = 9 \text{ (с.)}$$

2) Сколько страниц печатает вторая машинистка за 1 ч?

$$90 : 15 = 6 \text{ (с.)}$$

Разделим 90 страниц в отношении $9 : 6 = 3 : 2$.

3) Сколько страниц надо дать первой машинистке?

$$\frac{90 \cdot 3}{3 + 2} = 54 \text{ (с.)}$$

4) Сколько страниц надо дать второй машинистке?

$$90 - 54 = 36 \text{ (с.)}$$

Ответ: первой машинистке — 54 страницы, второй — 36 страниц.

36. Разделите 900 р. в отношении: а) 5 : 4; б) 2 : 3.

37. Разделите число:

а) 12 в отношении 1 : 3; б) 15 в отношении 2 : 3;

в) 48 в отношении $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$; г) 100 в отношении $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

38. Объясните, как разделить число 24 в отношении 1 : 2 : 3.

39. Первая машинистка печатает 10 страниц в час, вторая — 8 страниц в час. Как разделить между ними рукопись в 90 страниц, чтобы они закончили работу одновременно?



40. Чтобы приготовить стекло, берут 10 частей поташу, 31 часть песку и 2 части мела. Сколько нужно этих материалов на 86 пудов стекла?

41. Скорость велосипедиста в 5 раз больше скорости пешехода. Однажды они отправились одновременно навстречу друг другу из пунктов, расстояние между которыми 30 км. Какой путь проедет велосипедист до встречи с пешеходом?

42. Мотоциклист может проехать расстояние между пунктами за 2 ч, а велосипедист — за 6 ч. Однажды они одновременно отправились навстречу друг другу из этих пунктов. Сколько километров проехал каждый до встречи, если расстояние между пунктами 60 км? Решите задачу двумя способами.

***43.** Над выполнением задания 3 дня работала первая бригада из 5 плотников и 4 дня вторая бригада из 6 плотников. За работу заплатили 39 000 р. Какую сумму получит первая бригада, если все плотники работали с одинаковой производительностью?



Из «Арифметики» А. П. Киселёва. а) Разделить 84 на три части пропорционально числам 7, 5 и 2.

б) Разделить 125 на такие 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй, как 2 : 3, вторая к третьей, как 3 : 5, а третья к четвёртой, как 5 : 6.

в) Разделить 125 на такие части, чтобы первая часть относилась ко второй, как 2 : 3, вторая к третьей, как 4 : 5, а третья к четвёртой, как 6 : 11.

г) Три купца составили товарищество для ведения некоторого торгового дела. Первый купец внёс для этой цели 15 000 р., второй — 10 000 р., третий — 12 500 р. По окончании торгового дела они получили общей прибыли 7500 р. Спрашивается, сколько из этой прибыли придётся получить каждому купцу.

д) На железной дороге работало 3 артели; в первой было 27 рабочих, во второй — 32, в третьей — 15; первая работала 20 дней, вторая — 18, третья — 16; все три артели получили за работу 4068 р. Сколько придётся получить каждой артели?

1.4. Пропорции

Иногда два отношения могут оказаться равными. Например, равны отношения $20 : 4$ и $\frac{1}{3} : \frac{1}{15}$. Пишут: $20 : 4 = \frac{1}{3} : \frac{1}{15}$.

Равенство двух отношений называют **пропорцией**.

Пропорцию $a : b = c : d$, или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, читают так: «отношение a к b равно отношению c к d », или « a относится к b , как c относится к d ».

Числа a и d называют **крайними членами** пропорции, а числа b и c — **средними членами** пропорции:

$$\begin{array}{c}
 \text{средние члены} \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 a : b = c : d \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \text{крайние члены}
 \end{array}$$

Эти названия условны — достаточно написать пропорцию в обратном порядке (справа налево): $c : d = a : b$, и крайние члены станут средними, а средние — крайними.

Основное свойство пропорции заключается в том, что

произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } a \cdot d = b \cdot c.$$

В самом деле, умножив равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ на $b \cdot d$, получим

$$\frac{a \cdot \overset{1}{\cancel{b}} \cdot d}{\underset{1}{\cancel{b}}} = \frac{c \cdot b \cdot \overset{1}{\cancel{d}}}{\underset{1}{\cancel{d}}}, \text{ или } a \cdot d = c \cdot b.$$

Верно и обратное утверждение. Пусть a , b , c и d не равные нулю числа. Если $a \cdot d = b \cdot c$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

В самом деле, если разделить равенство $a \cdot d = b \cdot c$ на $b \cdot d$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$), то получим равенство:

$$\frac{a \cdot \overset{1}{\cancel{d}}}{b \cdot \underset{1}{\cancel{d}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{b}} \cdot c}{\underset{1}{\cancel{b}} \cdot d}, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следует пропорция $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, потому что если дроби равны, то равны и обратные им дроби.

Если один член пропорции неизвестен и необходимо его определить, то говорят, что нужно **решить пропорцию**.

Пример 1. Решим пропорцию $\frac{x}{12} = \frac{7}{4}$.

Умножив обе части данного равенства на 12, получим

$$\frac{x \cdot \overset{1}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{12}}} = \frac{7 \cdot \overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{12}}},$$

откуда найдём, что $x = 21$.

Пример 2. Решим пропорцию $\frac{30}{x} = \frac{5}{8}$.

По основному свойству пропорции произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов: $x \cdot 5 = 30 \cdot 8$, отсюда найдём, что

$$x = \frac{30 \cdot 8}{5}, \text{ т. е. } x = 48.$$

Пример 3. Решим пропорцию $\frac{7}{12} = \frac{10}{x}$.

Заменим данную пропорцию на пропорцию $\frac{x}{10} = \frac{12}{7}$ и умножим правую и левую части этого равенства на 10:

$$x = \frac{12 \cdot 10}{7}, \text{ т. е. } x = 17 \frac{1}{7}.$$

45. Что называют пропорцией? Приведите пример, назовите крайние и средние члены пропорции. Сформулируйте основное свойство пропорции.

46. Запишите в виде пропорции:

а) 2 относится к 3, как 10 относится к 15;

б) $\frac{1}{3}$ относится к 6, как 1 относится к 18;

в) 3 во столько же раз больше 2, во сколько раз 6 больше 4;

г) 7 больше $3\frac{1}{2}$ во столько же раз, во сколько раз 9 больше $\frac{9}{2}$.

47. Можно ли составить пропорцию из отношений:

а) 6 : 3 и 24 : 12;

б) 1 : 5 и 17 : 85;

в) 2 : 5 и 10 : 4;

г) 20 : 8 и 35 : 14?

Верно ли равенство (48–50):

48. а) $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; б) $7 : 5 = \frac{77}{55}$; в) $\frac{12}{18} = 14 : 21$?

49. а) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 10 : 12$; б) $\frac{3}{7} : \frac{4}{9} = 27 : 28$;

в) $\frac{4}{11} : \frac{5}{6} = 48 : 110$; г) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 4 : 3$?

50. а) $\frac{1}{7} : \frac{3}{4} = \frac{1}{14} : \frac{3}{8}$; б) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{1}{3} : \frac{2}{5}$;

в) $1\frac{1}{2} : 5 = 3 : 10$; г) $1\frac{4}{5} : 2 = 10 : 9$?

51. Замените пропорцией равенство:

- а) $12 \cdot 2 = 6 \cdot 4$; б) $15 \cdot 6 = 9 \cdot 10$;
в) $42 \cdot 4 = 84 \cdot 2$; г) $24 \cdot 10 = 2 \cdot 120$.

52. Из данной пропорции получите новую, поменяв местами крайние члены (средние члены):

- а) $\frac{25}{13} = \frac{50}{26}$; б) $28 : 25 = 84 : 75$.

Решите пропорцию (**53–58**):

53. а) $\frac{x}{2} = \frac{3}{7}$; б) $\frac{x}{3} = \frac{2}{5}$; в) $\frac{x}{12} = \frac{7}{10}$; г) $\frac{x}{16} = \frac{9}{32}$.

54. а) $\frac{7}{8} = \frac{x}{6}$; б) $\frac{13}{15} = \frac{x}{10}$; в) $\frac{12}{21} = \frac{x}{14}$; г) $\frac{48}{51} = \frac{x}{34}$.

55. а) $\frac{15}{x} = \frac{5}{8}$; б) $\frac{24}{x} = \frac{8}{7}$; в) $\frac{12}{x} = \frac{4}{5}$; г) $\frac{25}{x} = \frac{5}{7}$.

56. а) $\frac{3}{5} = \frac{7}{x}$; б) $\frac{8}{7} = \frac{15}{x}$; в) $\frac{7}{1} = \frac{12}{x}$; г) $\frac{8}{1} = \frac{3}{x}$.

57. а) $x : \frac{1}{2} = 3 : 5$; б) $x : \frac{2}{3} = 3 : 4$;

в) $x : 5 = 7 : \frac{1}{2}$; г) $x : 6 = \frac{1}{3} : 8$.

58. а) $14 : 15 = 3 : x$; б) $12 : 29 = \frac{1}{58} : x$;

в) $12 : 25 = \frac{7}{15} : x$; г) $144 : 125 = 1\frac{1}{2} : x$.

Доказываем

59. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то:

а) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; б) $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$; в) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$; г) $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.

Решите пропорцию (**60–61**):

60. а) $\frac{2x}{3} = \frac{4}{9}$; б) $\frac{3x}{5} = \frac{9}{10}$; в) $\frac{8}{15} = \frac{6x}{9}$; г) $\frac{12}{13} = \frac{18x}{39}$.

61. а) $\frac{1}{5} = 2 : 3x$; б) $\frac{2}{7} = \frac{3}{4x}$; в) $\frac{21}{25} = \frac{49}{50x}$; г) $\frac{16}{19} = 32 : 38x$.

1.5. Прямая и обратная пропорциональность

Пусть ручка стоит 3 р., тогда стоимость таких же двух, трёх и т. д. ручек легко рассчитать:

Количество ручек, шт.	1	2	3	4	5	6
Стоимость, р.	3	6	9	12	15	18

С увеличением количества ручек в несколько раз их стоимость увеличивается во столько же раз.

Две величины называют **прямо пропорциональными**, если при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.

В рассмотренном примере стоимость покупки прямо пропорциональна количеству купленных ручек.

Время движения и пройденный путь прямо пропорциональны при постоянной скорости движения. Если машина за 2 ч проедет 120 км, то за 6 ч она проедет 360 км, время увеличилось в 3 раза, значит, и путь должен увеличиться в 3 раза.

Хотят купить на 120 р. несколько одинаковых книг. Зависимость количества книг от цены одной книги задана таблицей:

Цена, р.	10	20	30	40	60	120
Количество книг, шт.	12	6	4	3	2	1

С увеличением цены книги в несколько раз количество книг, которые можно купить, уменьшается во столько же раз.

Две величины называют **обратно пропорциональными**, если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.

В рассмотренном примере количество купленных книг обратно пропорционально их цене.

Скорость и время движения с постоянной скоростью на одном участке пути обратно пропорциональны. Если машина проедет некоторый участок пути со скоростью 50 км/ч за 4 ч, то со скоростью 25 км/ч она проедет тот же участок пути за 8 ч, так как скорость уменьшилась в 2 раза, значит, время увеличится в 2 раза.

Задача 1. Двигаясь с постоянной скоростью, поезд прошёл 60 м за 2 с. Какой путь пройдёт поезд за 15 с?

Решение. При постоянной скорости путь прямо пропорционален времени движения. Запишем кратко условие задачи, считая, что за 15 с поезд пройдёт x м:

$$\begin{array}{l} \downarrow 60 \text{ м} - 2 \text{ с} \downarrow \\ \downarrow x \text{ м} - 15 \text{ с} \downarrow \end{array}$$

Одинаково направленными стрелками показано, что величины прямо пропорциональны.

Время увеличилось в $\frac{15}{2}$ раза, а путь увеличился в $\frac{x}{60}$ раз. Так как величины прямо пропорциональны, то отношения $\frac{x}{60}$ и $\frac{15}{2}$ равны: $\frac{x}{60} = \frac{15}{2}$. Решим полученную пропорцию:

$$x = \frac{15 \cdot 60}{2}, \text{ т. е. } x = 450.$$

Ответ: 450 м.

Задача 2. Поезд, скорость которого 45 км/ч, затратил на некоторый участок пути 4 ч. За сколько часов пройдёт этот же участок пути товарный поезд, если его скорость 40 км/ч?

Решение. При постоянном пути скорость и время движения обратно пропорциональны. Запишем кратко условие задачи, считая, что товарный поезд пройдёт тот же участок пути со скоростью 40 км/ч за x ч.

$$\begin{array}{l} \downarrow 45 \text{ км/ч} - 4 \text{ ч} \uparrow \\ \downarrow 40 \text{ км/ч} - x \text{ ч} \uparrow \end{array}$$

Противоположно направленными стрелками показано, что величины обратно пропорциональны.

Скорость уменьшилась в $\frac{45}{40}$ раза, а время движения увеличилось в $\frac{x}{4}$ раза. Так как величины обратно пропорциональны, то отношения $\frac{45}{40}$ и $\frac{x}{4}$ равны: $\frac{45}{40} = \frac{x}{4}$.

Решим полученную пропорцию:

$$x = \frac{45 \cdot 4}{40}, \text{ т. е. } x = 4 \frac{1}{2}.$$

Ответ: $4 \frac{1}{2}$ ч.

- 70.** Какова зависимость между:
а) количеством одинаковых тракторов и площадью, которую они вспашут за один день;
б) числом дней работы трактора и площадью, которую он вспашет;
в) количеством одинаковых тракторов и числом дней, за которые они вспашут поле?

- 71.** а) Покупают одинаковые тетради. Какова зависимость между количеством тетрадей и стоимостью всей покупки?
б) Некто хочет проехать расстояние между двумя городами с постоянной скоростью. Какова зависимость между скоростью и временем движения?

- 72.** За 6 ч поезд прошёл 480 км. Сколько километров поезд прошёл за первые 2 ч, двигаясь с постоянной скоростью?



- 73.** Для варки варенья из вишни на 6 кг ягод берут 4 кг сахарного песка. Сколько килограммов сахарного песка надо взять на 12 кг ягод?

- 74.** Для варки варенья из вишни на 6 кг ягод берут 4 кг сахарного песка. Сколько килограммов ягод надо взять на 12 кг сахарного песка?

- 75.** а) В 100 г раствора содержится 4 г соли. Сколько соли содержится в 300 г этого раствора?
б) В 4000 г раствора содержится 80 г соли. Сколько соли содержится в 200 г этого раствора?

- 76.** Расстояние между двумя городами первый поезд прошёл со скоростью 80 км/ч за 3 ч. За сколько часов второй поезд пройдёт то же расстояние со скоростью 60 км/ч?

- 77.** Пять маляров могли бы покрасить забор за 8 дней. За сколько дней тот же забор покрасят:
а) 10 маляров; б) 1 маляр?

- 78.** 8 м сукна стоят столько же, сколько стоят 63 м ситца. Сколько метров ситца можно купить вместо 14 м сукна?

- 79.** В жаркий день 6 козцов выпили бочонок кваса за 8 ч. Нужно узнать, сколько козцов за 3 ч выпьют такой же бочонок кваса.

- 80.** Из «Арифметики» А. П. Киселёва. 8 аршин сукна стоят 30 р. Сколько стоят 15 аршин этого сукна?

- 81.** Со скоростью 80 км/ч товарный поезд прошёл 720 км. Какое расстояние пройдёт за то же время пассажирский поезд, скорость которого 60 км/ч?

- 82.** а) Грузовик со скоростью 60 км/ч проехал расстояние между городами за 8 ч. За сколько часов то же расстояние проедет легковой автомобиль со скоростью 80 км/ч?
б) Бригада из 4 человек может выполнить задание за 10 дней. За сколько дней выполнит такое же задание другая бригада из 5 человек, если все 9 человек работают одинаково хорошо?
- 83.** Один килограмм металлолома заменяет $2\frac{1}{2}$ кг богатой железом руды. Сколько руды заменяют 4 т металлолома?
- 84.** а) Автомобилист заметил, что со скоростью 60 км/ч он проехал мост через реку за 40 с. На обратном пути он проехал этот же мост за 30 с. Определите скорость автомобиля на обратном пути.
б) Автомобилист заметил, что со скоростью 60 км/ч он проехал тоннель за 1 мин. За сколько минут он проехал бы этот тоннель со скоростью 50 км/ч?
- 85.** Две шестерёнки сцеплены зубьями. Первая, имеющая 60 зубьев, за минуту делает 50 оборотов. Сколько оборотов за минуту делает вторая, имеющая 40 зубьев?
- 86.** За одно и то же время токарь делает 6 деталей, а его ученик — 4 детали.
а) Сколько деталей сделает ученик токаря за то же время, за которое токарь сделает 27 деталей?
б) Сколько времени потратит ученик токаря на задание, которое токарь выполняет за 1 ч?
- 87.** За одно и то же время пешеход прошёл 6 км, а велосипедист проехал 18 км.
а) Сколько километров проехал велосипедист за то же время, за которое пешеход прошёл 10 км?
б) Сколько времени потратил велосипедист на тот путь, который пешеход прошёл за 2 ч?
- 88.** Некоторую работу 6 человек сделают за 18 дней. За сколько дней сделают ту же работу 9 человек, работающих так же успешно, как и первые?
- *89.** а) Шесть маляров выполняют работу за 5 дней. Сколько ещё маляров надо пригласить, чтобы все вместе они выполнили то же задание за 3 дня?
б) Двое рабочих могли выполнить задание за 10 дней. Сколько ещё рабочих надо пригласить, чтобы все вместе они выполнили то же задание за 4 дня?



Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Некий господин позвал плотника и велел двор построить. Дал ему двадцать человек работников и спросил, в сколько дней построят они его двор. Плотник ответил: в тридцать дней. А господину надобно в 5 дней построить, и ради того спросил он плотника: сколько человек тебе надо иметь, дабы с ними ты построил двор в 5 дней; и плотник, недоумевая, спрашивает тебя, арифметик: сколько человек ему надо иметь, чтобы построить тот двор в 5 дней?



Из «Сборника задач и упражнений по арифметике» С. А. Пономарёва и Н. И. Сырнева. а) Скорость парохода относится к скорости течения как $36 : 5$. Пароход двигался по течению 5 ч 10 мин. Сколько времени потребуется ему, чтобы вернуться обратно?

б) Катер проходит определённое расстояние в стоячей воде за 12 ч. То же расстояние он может пройти по течению за 10 ч. Против течения катер идёт со скоростью 24 км/ч. Определите скорость катера по течению.

ИЩЕМ ИНФОРМАЦИЮ

92 Найдите в учебнике, справочной литературе или Интернете, как решали задачи на прямую и обратную пропорциональности во времена Л. Ф. Магницкого и в средневековой Европе. Придумайте задачу на прямую или обратную пропорциональность и решите её старинным способом.

1.6. Понятие о проценте

Одну сотую часть числа (величины) называют **процентом** этого числа (величины).

В энциклопедии это определение формулируют так: процентом называют сотую часть целого, принимаемого за единицу. Один процент обозначают 1 % и читают: «один процент».

Например, $1\% \text{ м} = \frac{1}{100} \text{ м} = 1 \text{ см}$; $1\% \text{ кг} = \frac{1}{100} \text{ кг} = 10 \text{ г}$.

Запись «2 %» читается «два процента», запись «17 %» читается «семнадцать процентов». Вместо того чтобы говорить «тридцать девять сотых числа (величины)», говорят «тридцать девять процентов числа (величины)».

Рассмотрим задачи на проценты.

Задача 1. Найти 1 % от 600 м.

Решение. 1 % от 600 м равен $\frac{1}{100}$ от 600 м:
 $600 : 100 = 6$ (м).

Ответ: 6 м.

Задача 2. Найти 25 % от 36 м.

Решение. 1 % от 36 м равен $\frac{36}{100}$ м; 25 % от 36 м равны:

$$25 \cdot \frac{36}{100} = \frac{25 \cdot 36}{100} = \frac{36}{4} = 9 \text{ (м)}.$$

Ответ: 9 м.

Задача 3. Найти число, 1 % которого равен 5.

Решение. Так как 1 % числа равен 5, то само число в 100 раз больше:

$$5 \cdot 100 = 500.$$

Ответ: 500.

Задача 4. Найти число, 30 % которого равны 60.

Решение. Так как 30 % числа равны 60, то 1 % числа равен $\frac{60}{30}$. Само число в 100 раз больше:

$$\frac{60}{30} \cdot 100 = \frac{60 \cdot 100}{30} = 200.$$

Ответ: 200.

Чтобы найти 1 % от числа (величины) A , надо найти $\frac{1}{100}$ от A , т. е. 1 % от A — это $\frac{1}{100} \cdot A$.

Например, 1 % числа 48 — это $\frac{1}{100}$ числа 48, т. е.

$$\frac{1}{100} \cdot 48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}.$$

Чтобы найти 3 % от числа (величины) A , надо найти $\frac{3}{100}$ от числа A , т. е. 3 % от A — это $\frac{3}{100} \cdot A$.

Чтобы найти p % от числа (величины) A , надо найти $\frac{p}{100}$ от A , т. е. p % от A — это $\frac{p}{100} \cdot A$.

Например, 2 % от числа 300 — это $\frac{2}{100} \cdot 300 = 6$.

Задача 5. Из 30 учащихся класса в различных кружках занимаются 12. Сколько процентов учащихся класса занимается в кружках?

Решение. В кружках занимается часть учащихся, равная $\frac{12}{30}$.

Так как $\frac{12}{30} = \frac{12}{30} \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} = \frac{40}{100}$, то это означает, что в кружках занимается сорок сотых всех учащихся класса, т. е. 40 % от всех учащихся класса.

Ответ: 40 %.

Заметим, что для нахождения ответа в задаче 5 надо 12 разделить на 30 и частное умножить на 100.

Таким образом,

чтобы узнать, сколько процентов первое число составляет от второго, надо первое число разделить на второе и результат умножить на 100.

Задача 6. Сколько процентов от числа 200 составляет число 125?

Решение. По предыдущему правилу 125 разделим на 200 и результат умножим на 100:

$$\frac{125}{200} \cdot 100 \% = 62\frac{1}{2} \%.$$

Ответ: $62\frac{1}{2}$ %.

Краткая запись $1 \% = \frac{1}{100}$ означает, что 1 % некоторого числа (величины) равен $\frac{1}{100}$ этого же числа (величины).

Краткая запись $p \% = \frac{p}{100}$ означает, что p % некоторого числа (величины) равны $\frac{p}{100}$ этого же числа (величины). Поэтому иногда говорят, что проценты можно записать в виде дробей, а дроби — в виде процентов, и пишут, например, $13 \% = \frac{13}{100}$ и $\frac{99}{100} = 99 \%.$

93. Что называют процентом?

94. Как найти несколько процентов числа?

- 95.** Запишите проценты в виде дроби:
1 %, 5 %, 70 %, 100 %, 120 %, 150 %, 200 %, 1020 %.
- 96.** Прочитайте предложение, запишите число процентов в виде дроби, прочитайте полученное предложение:
а) Число 25 составляет 25 % от 100.
б) Число 20 составляет 50 % от 40.
в) Число 500 увеличили на 10 % и получили 550.

97. Запишите дроби в виде процентов:

а) $\frac{1}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 2 , $1\frac{15}{100}$.

98. В начале XX века в России из каждых 100 человек, занятых в хозяйстве, 9 человек работали в промышленности, 75 работали в сельском хозяйстве, 9 человек работали в торговле. Выразите в процентах долю работников, занятых в промышленности, сельском хозяйстве и в торговле, от общего числа занятых в хозяйстве.

99. Найдите 1 % от:

- а) 1 метра; б) 1 центнера; в) 1 килограмма.

100. Найдите 5 %, 17 %, 23 % от:

- а) 1 метра;
б) 1 центнера;
в) 1 килограмма.



101. Найдите:

- а) 1 % от 100; б) 1 % от 300; в) 5 % от 40;
г) 7 % от 200; д) 20 % от 15; е) 25 % от 48;
ж) 100 % от 49; з) 120 % от 250; и) 200 % от 300.

102. Служащий вложил 500 р. в акции своего предприятия и получил 20 % дохода. Сколько рублей дохода он получил?

103. Какую часть числа составляют его:

- а) 1 %; б) 5 %; в) 10 %; г) 20 %;
д) 25 %; е) 50 %; ж) 75 %; з) 100 %?

104. Вычислите:

- а) 50 % от 400; б) 10 % от 20; в) 25 % от 16; г) 75 % от 8.

105. Из сахарной свёклы получают сахар, масса которого составляет 18 % массы свёклы. Сколько сахара получится при переработке:
а) 40 т свёклы; б) 30 т свёклы; в) 500 т свёклы?

106. Магнитный железняк содержит 70 % чистого железа. Сколько тонн железа в 13 т железняка?

107. Сплав содержит 62 % олова и 38 % свинца. Сколько граммов олова и сколько свинца в 400 г сплава?

108. Папа потратил 2000 р. на подарки маме и нам — детям. На подарок маме он потратил 40 % этой суммы, мне и моей сестре по 30 %. Все ли деньги потратил папа? Нет ли в задаче лишних данных?

109. а) 25 % учащихся класса соревновались в прыжках в высоту, ещё 75 % — в прыжках в длину. Все ли учащиеся класса участвовали в соревнованиях?

б) Туристы проехали 80 % намеченного маршрута на поезде и 15 % — на автобусе. Весь ли маршрут они уже проехали?

в) Маша потратила 70 % имевшихся у неё денег на книги и 30 % — на тетради. Все ли деньги потратила Маша?

110. Учительница сказала: «С контрольной работой справились 100 % учащихся нашего класса». Как это понимать?



111. а) Потратили 80 % суммы. Сколько процентов этой суммы осталось?

б) Мужчины составляют 75 % всех работников завода. Сколько процентов всех работников составляют женщины?

в) Девочки составляют 40 % класса. Сколько процентов класса составляют мальчики?

112. а) Найдите 15 % числа 36.

б) Найдите число, 15 % которого равны 36.

113. Найдите число:

а) 1 % которого равен 3;

б) 10 % которого равны 40;

в) 15 % которого равны 30;

г) 50 % которого равны 250.

114. Запишите дробь в виде процентов:

а) $\frac{4}{5}$;

б) $\frac{5}{4}$;

в) $\frac{3}{4}$;

г) $\frac{13}{25}$;

д) $\frac{17}{20}$;

е) $\frac{4}{3}$.

- 115.** а) В магазин привезли партию лампочек. Среди них оказалось 16 разбитых лампочек, что составило 2% от общего числа. Сколько лампочек привезли в магазин?
 б) Посадили семена гороха, 270 из них взошли. Это составило 90% всех посаженных семян. Сколько семян посадили?
- 116.** Из 16 кг свежих груш получили 4 кг сушёных. Какую часть от массы свежих груш составляет масса сушёных? Выразите эту часть в процентах. Сколько процентов массы теряется при сушке?
- 117.** Сколько процентов числа 50 составляет число 40? Сколько процентов числа 40 составляет число 50?
- 118.** а) Посадили 50 семян, 47 из них взошли. Определите процент всхожести семян.
 б) В школе 400 учащихся, 12 из них учатся на «5». Сколько процентов учащихся школы учится на «5»?
- 119.** Маша прочитала 120 страниц, и ей ещё осталось прочитать 130 страниц книги.
 а) Сколько процентов всех страниц она прочитала?
 б) Сколько процентов всех страниц ей осталось прочитать?
- 120.** В июне было 12 солнечных и 18 пасмурных дней. Сколько процентов составили:
 а) солнечные дни;
 б) пасмурные дни?
- 121.** В одном килограмме сыра содержится 200 г белка. Сколько процентов белка содержится в сыре?



1.7. Задачи на проценты

Так как процент какой-либо величины можно записать в виде дроби этой величины, то задачи на проценты можно решать как задачи на дроби — умножением или делением на дробь. Рассмотрим такие задачи.

Задача 1. В городе 64 тыс. избирателей, 85% всех избирателей приняли участие в выборах. Сколько избирателей приняли участие в выборах?

Решение. Найдём 85%, или $\frac{85}{100}$, от 64 000:

$$\frac{85}{100} \cdot 64\,000 = 54\,400 \text{ (избирателей).}$$

Ответ: 54 400 избирателей.

Задача 2. В соревнованиях было 9 победителей, что составило 18 % всех участников. Сколько было участников соревнований?

Решение. Число 9 составляет 18 %, или $\frac{18}{100}$, неизвестного числа. Найдём это число, разделив 9 на $\frac{18}{100}$.

$$9 : \frac{18}{100} = 50 \text{ (участников).}$$

Ответ: 50 участников.

○ Заметим, что простые задачи на проценты можно решать с помощью одного приёма — как задачи на прямую пропорциональность.

Пример 1. Найдём 8 % от 35.

Решение. Пусть x — искомое число, тогда

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 35 - 100 \% & \downarrow \\ & x - 8 \% & \\ \frac{35}{x} = \frac{100}{8}, & x = \frac{35 \cdot 8}{100}, & x = \frac{14}{5}, \quad x = 2 \frac{4}{5}. \end{array}$$

Ответ: $2 \frac{4}{5}$.

Пример 2. Найдём число, 12 % которого равны 3.

Решение. Пусть x — искомое число, тогда

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & x - 100 \% & \downarrow \\ & 3 - 12 \% & \\ \frac{x}{3} = \frac{100}{12}, & x = \frac{3 \cdot 100}{12}, & x = 25. \end{array}$$

Ответ: 25.

Пример 3. Сколько процентов составляет число 8 от числа 40?

Решение. Пусть 8 от 40 составляет x процентов, тогда

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 40 - 100 \% & \downarrow \\ & 8 - x \% & \\ \frac{40}{8} = \frac{100}{x}, & x = \frac{8 \cdot 100}{40}, & x = 20. \end{array}$$

Ответ: 20 %. ●

122. а) В магазин привезли 2500 кг лука. Продали 30 % всего лука. Сколько килограммов лука осталось продать?

б) В школе 400 учащихся, 52 % этого числа составляют девочки. Сколько мальчиков в школе?

123. Масса сушёных груш составляет 20 % массы свежих. Сколько килограммов сушёных груш получится из 100 кг; 350 кг; 25 кг свежих? Сколько процентов массы свежих груш теряется при сушке?

- 124.** Виноград при сушке теряет 70 % своей массы. Сколько изюма (сушёного винограда) получится из 100 кг; 250 кг; 80 кг свежего винограда?
- 125.** Припой содержит 40 % олова, 2 % сурьмы, остальную часть составляет свинец. Сколько граммов олова, свинца и сурьмы в 300 г припоя?
- 126.** Токарь до обеденного перерыва обточил 24 детали, что составляет 60 % сменной нормы. Сколько деталей должен обточить токарь за смену?
- 127.** а) Туристы прошли 75 % маршрута, и им осталось пройти ещё 5 км. Какова длина всего маршрута?
б) Туристы прошли 5 % маршрута, и им осталось пройти ещё 19 км. Какова длина всего маршрута?
- 128.** Что больше:
а) 30 % от 40 или 40 % от 30; б) 80 % от 60 или 60 % от 70?
- 129.** Определите без вычислений, что больше:
а) 12 % от 34 или 13 % от 34; б) 12 % от 49 или 12 % от 50.
- 130.** Товар стоил 500 р. Его цена повысилась на 20 %. На сколько рублей повысилась цена?
- 131.** У Алёши 80 марок, у Бори на 20 % больше, чем у Алёши. У Вовы на 25 % меньше, чем у Алёши. Сколько марок у Бори и Вовы в отдельности?
- 132.** Увеличьте число:
а) 60 на 10 %; б) 80 на 25 %;
в) 40 на 50 %; г) 425 на 4 %.
- 133.** Уменьшите число:
а) 60 на 10 %; б) 80 на 25 %; в) 90 на 50 %; г) 125 на 20 %.
- 134.** а) Увеличьте число 80 на 20 %; 30 %; 65 %; 80 %.
б) Уменьшите число 60 на 15 %; 20 %; 25 %; 75 %.
- 135.** Мясо при варке теряет 40 % своей массы.
а) Сколько варёного мяса получится из 6 кг свежего?
б) Сколько свежего мяса нужно взять, чтобы получить 6 кг варёного?



Придумываем задачу

- 136.** Найдите в справочной литературе, школьных учебниках по другим предметам, периодической печати или Интернете примеры применения процентов. Составьте задачу на проценты и решите её.

1.8. Круговые диаграммы

Для того чтобы наглядно показать соотношение целого и его частей, часто используют круговые диаграммы.

Например, если в пятом классе учатся 18 девочек и 18 мальчиков, то всем учащимся этого класса соответствует круг, а девочкам и мальчикам соответствует по половине этого круга (рис. 5). Каждому мальчику и каждой девочке на диаграмме соответствует угол с вершиной в центре круга (его называют **центральный угол**) величиной

$$180^\circ : 18 = 10^\circ.$$

Всем учащимся класса соответствует **полный угол**, содержащий 360° (рис. 6).

Покажем на круговой диаграмме результаты выполнения контрольной работы по математике в 6 классе:

«5» получили 4 человека,

«4» — 14 человек,

«3» — 12 человек.

Всем $4 + 14 + 12 = 30$ учащимся соответствует полный угол величиной 360° , а каждому учащемуся соответствует центральный угол величиной $360^\circ : 30 = 12^\circ$.

Получившим «5» соответствует угол в $12^\circ \cdot 4 = 48^\circ$ (рис. 7),

получившим «4» — $12^\circ \cdot 14 = 168^\circ$,

получившим «3» — $12^\circ \cdot 12 = 144^\circ$.

Иногда на круговой диаграмме не указывают точных данных, а выражают части целого в процентах. Например, на диаграмме

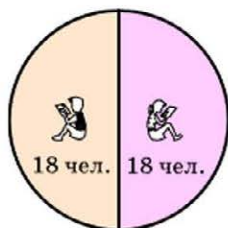


Рис. 5

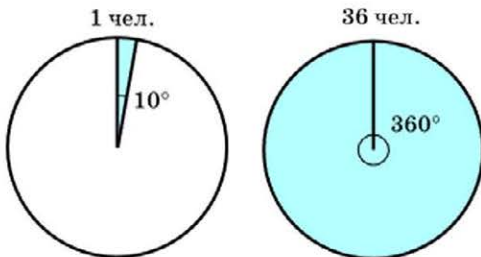


Рис. 6

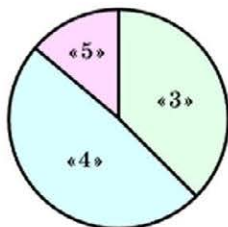


Рис. 7

(рис. 8) отражено участие жителей города N в голосовании по выборам депутатов в городскую думу: 80 % всех избирателей приняли участие в голосовании, а 20 % нет. Чтобы построить такую диаграмму, надо определить величину центрального угла, соответствующего 20 % избирателей: $360^\circ : 100 \cdot 20 = 72^\circ$.

- 137.** Сколько градусов содержит развёрнутый угол? Сколько градусов содержит полный угол?
- 138.** Используя круговую диаграмму (рис. 9), скажите, сколько в доме однокомнатных квартир; двухкомнатных; трёхкомнатных.
- 139.** На круговой диаграмме (рис. 10) показан процентный состав населения города N . Сколько мужчин, женщин и детей живёт в городе N , если всего в нём 48 тыс. жителей?
- 140.** На круговой диаграмме (рис. 11) показано содержание металлов в сплаве. Сколько граммов олова, свинца и других металлов содержится в 200 г такого сплава?
- 141.** Постройте круговую диаграмму, отражающую результаты выполнения контрольной работы по русскому языку в 7 классе: «5» получили 3 человека, «4» — 12 человек, «3» — 15 человек («2» и «1» нет).
- 142.** Постройте круговую диаграмму «Мой режим дня».

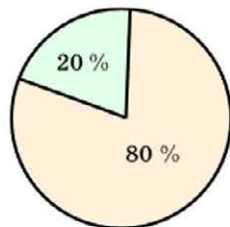


Рис. 8

Придумываем задачу

- 143.** Используя данные из других школьных предметов, периодической печати или Интернета, придумайте задачу на составление круговой диаграммы.



Рис. 9



Рис. 10



Рис. 11

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1 ЗАДАЧИ НА ПЕРЕБОР ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ

Рассмотрим задачи, в которых требуется осуществить перебор всех возможных вариантов или подсчитать их число.

Задача 1. Запишите все трёхзначные числа, в записи которых используются цифры 1, 2 и 3 без повторения.

Решение. Запишем в порядке возрастания все числа, удовлетворяющие условию задачи:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2 и 3?

Решение. В отличие от задачи 1, здесь можно повторять цифры. Чтобы ответить на вопрос задачи, можно выписать все двузначные числа, удовлетворяющие условию задачи:

11	21	31
12	22	32
13	23	33

На первом месте может стоять одна из трёх цифр: 1, 2 или 3. В каждом из этих трёх случаев на второе место можно поставить одну из трёх цифр: 1, 2 или 3. Итого имеется $3 \cdot 3 = 9$ двузначных чисел, записанных цифрами 1, 2 и 3.

Ответ: 9.

Убедимся тем же способом, что в задаче 1 можно составить только 6 чисел. На первое место можно поставить любую из трёх цифр (рис. 12), на второе место можно поставить только одну из двух оставшихся, т. е. имеется $3 \cdot 2 = 6$ возможностей занять два первых места. В каждом из этих шести случаев третье место можно занять оставшейся третьей цифрой единственным способом. Всего таким образом можно составить только 6 трёхзначных чисел.

Задача 3. На окружности отмечено пять точек: A , B , C , D и E . Каждую точку соединили с каждой. Сколько всего отрезков получилось?

Решение. На рисунке 13 отрезки можно пересчитать — их 10. Но при большом числе точек такой пересчёт может привести к ошибке.

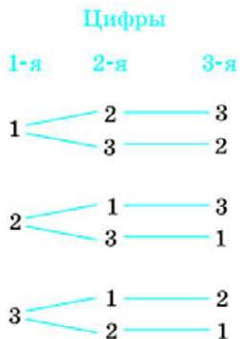


Рис. 12

Решим задачу вторым способом.

Из точки A проведено 4 отрезка: AB , AC , AD , AE ; из точки B проведено тоже 4 отрезка, но один из них (AB) уже учтён, значит, из B выходят 3 новых отрезка.

Из C выходят 2 новых отрезка, из D — один.

Из точки E выходят 4 отрезка, но все они уже учтены.

Итого имеется $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ отрезков.

Решим задачу 3 ещё одним способом. Из A выходят 4 отрезка: AB , AC , AD , AE . Из B выходят 4 отрезка: BA , BC , BD , BE и т. д.

Из каждой из пяти точек выходят по четыре отрезка. Но чтобы получить ответ, надо произведение $4 \cdot 5$ разделить на 2, так как каждый из отрезков в этих перечислениях назван дважды. Итак,

всего отрезков $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Ответ: 10 отрезков.

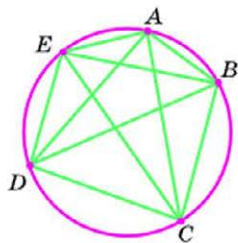


Рис. 13

- 144.** Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры:
- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| а) 1, 3, 9 без повторения; | б) 1, 3, 9 с повторением; |
| в) 2, 4, 6 без повторения; | г) 2, 4, 6 с повторением. |
- 145.** Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры 0, 1, 5: а) без повторения; б) с повторением.
- 146.** Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 9, 8, 7: а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?
- 147.** Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 0, 2, 4, 6: а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?
- 148.** Четыре подружки купили 4 билета в кино. Сколькими различными способами они могут занять свои места в зрительном зале?
- *149.** Сколько двузначных; трёхзначных; четырёхзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5 без повторения?
- *150.** Сколько двузначных; трёхзначных; четырёхзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5 с повторением?
- *151.** а) Все четырёхзначные числа, записанные цифрами 1, 2, 3, 4 без повторения, занумеровали в порядке возрастания чисел. Какой номер имеет число 4312?
б) Все пятизначные числа, записанные цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения, занумеровали в порядке возрастания чисел. Какой номер имеет число 54312?

в) Все пятизначные числа, записанные цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения, выписывают в порядке возрастания. Сколько чисел в этом списке? Каким по счёту в этом списке будет число 54 231?

152. У круглого стола поставили четыре стула. Сколькими способами можно рассадить на эти стулья:

а) четырёх детей; б) трёх детей; в) двух детей?

153. Мальчика и двух девочек надо рассадить за круглым столом с четырьмя стульями так, чтобы девочки не оказались рядом. Сколькими способами это можно сделать?

154. Двух мальчиков и двух девочек надо рассадить за круглым столом с четырьмя стульями так, чтобы девочки не оказались рядом. Сколькими способами это можно сделать?

155. Бросили два игральных кубика. На первом выпало 3 очка, на втором — 6 очков (рис. 14). Сколькими различными способами может выпасть сумма в 9 очков? Сколькими различными способами могут выпасть очки на этих кубиках?

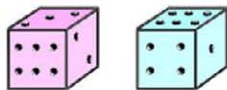


Рис. 14

156. а) На окружности отметили 6 точек (рис. 15). Сколько получится отрезков, если соединить каждую точку с каждой?

б) Встретились шесть друзей (рис. 16), каждый пожал руку каждому. Сколько было рукопожатий?

157. Восемь друзей решили провести турнир по шашкам так, чтобы каждый сыграл с каждым одну партию. Сколько партий будет сыграно?

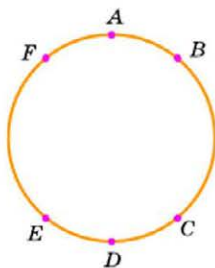


Рис. 15

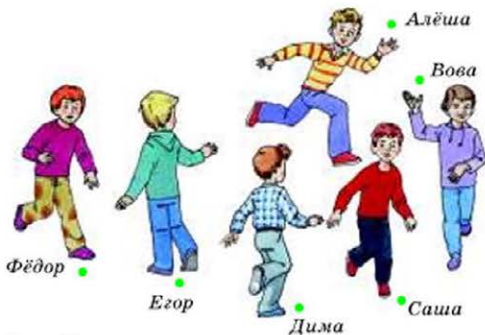


Рис. 16

ИССЛЕДУЕМ

- *158. Несколько приятелей при встрече обменялись рукопожатиями. Только Вася Угрюмов был не в духе и пожал руку не всем своим приятелям. Всего было 13 рукопожатий. Скольким приятелям Вася пожал руку?
- *159. Несколько приятелей при встрече обменялись рукопожатиями. Только Петя Веселов был так рад встрече, что дважды пожал руку некоторым из своих приятелей (но не всем). Всего было b рукопожатий. Скольким приятелям Петя пожал руку дважды? Решите задачу, если:
а) $b = 17$; б) $b = 18$; в) $b = 19$.
- *160. Постройте многоугольник, имеющий n сторон, если:
а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$; г) $n = 7$; д) $n = 8$.
В каждом случае проведите все диагонали многоугольника. Объясните, почему число d всех диагоналей многоугольника вычисляется по формуле $d = \frac{n(n-3)}{2}$.
- *161. Ученица нарисовала многоугольник и провела 20 диагоналей. Ей осталось провести меньше половины всех диагоналей этого многоугольника. Сколько диагоналей ей осталось провести?

2. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Часто говорят: «это вполне вероятно», или «это маловероятно», или «это невероятно». В этих и других выражениях встречается слово «вероятно». Что же такое вероятность?

Пример 1. Пусть на стол бросают любую монету. В результате этого обязательно произойдёт одно из двух событий (рис. 17).

Событие A :
«выпала решка»



Событие B :
«выпал орёл»



Рис. 17

Так как предполагается, что монета идеальная, т. е. она правильной формы и состоит из однородного металла, то события A и B в нашем примере равновозможные и одно из этих событий обязательно произойдёт.

Говорят, что событию A благоприятствует один случай, событию B благоприятствует тоже один случай — всего два случая.

Вероятностью события A называют отношение количества случаев, благоприятствующих событию A , к числу всех равновозможных случаев, один из которых обязательно произойдёт.

Таким образом, вероятность события A равна $\frac{1}{2}$. Очевидно, что в этом примере вероятность события B также равна $\frac{1}{2}$.

Случай «монета встала на ребро» считаем невероятным и не учитываем.

В рассмотренном примере событие A может произойти, а может не произойти, аналогично и событие B может произойти, а может не произойти, но одно из этих событий обязательно произойдёт. Такие события называют случайными событиями.

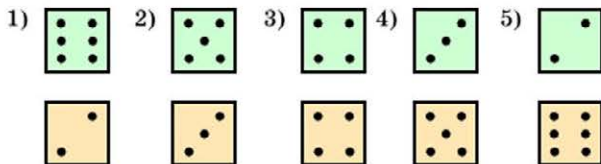
Пример 2. Пусть на стол бросают игральный кубик. Предполагается, что кубик идеальный, т. е. никакое число очков при большом числе испытаний не выпадает чаще других. Возможны 6 случаев: выпадение 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков. Эти случаи равновозможны и один из них обязательно произойдёт. Пусть событие C заключается в выпадении чётного числа очков, а событие B — в выпадении числа очков, кратного числу 3. Событию C благоприятствуют три случая: выпадение 2, 4 и 6 очков, событию B — два случая: выпадение 3 и 6 очков.

Вероятность события C равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию C , к числу всех равновозможных случаев, а таких случаев только 6. Таким образом, вероятность события C равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Аналогично получаем, что вероятность события B равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Пример 3. Двое играют в такую игру. Они бросают два кубика. Первый получает очко, если выпадает сумма 8. Второй получает очко, если выпадает сумма 9. Справедливая ли это игра?

Решение. Будем считать, что игра справедливая, если вероятность выиграть очко у каждого из соперников одна и та же.

Событие А:
«сумма равна 8»



Событие В:
«сумма равна 9»

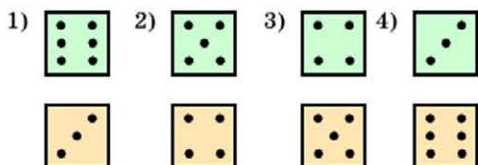


Рис. 18

Подсчитаем число благоприятных случаев для каждого события (рис. 18).

Для события A есть 5 благоприятных случаев, для события B — только 4. Чтобы подсчитать вероятности событий A и B в этом примере, надо определить число всех возможных случаев, один из которых обязательно произойдет. На первом кубике может выпасть одно из шести чисел; для каждого из них на втором кубике может выпасть одно из шести чисел, т. е. число всех случаев $6 \cdot 6 = 36$.

Вероятность события A равна $\frac{5}{36}$, а вероятность события B равна $\frac{4}{36}$. Так как $\frac{5}{36} > \frac{4}{36}$, то вероятность события A больше вероятности события B , следовательно, игра несправедливая.

Если событие не может произойти в данном опыте, то его называют невозможным событием. Вероятность невозможного события равна 0.

Например, выпадение 0 очков при подбрасывании игрального кубика — это невозможное событие. Его вероятность равна 0.

Если событие обязательно произойдет в данном опыте, то его называют достоверным событием. Вероятность достоверного события равна 1.

Например, выпадение не более 6 очков при подбрасывании игрального кубика — это достоверное событие. Его вероятность равна 1.

162. Бросают игральный кубик. Подсчитайте вероятность события:

- а) *A*: «выпадает 5 очков»;
- б) *B*: «выпадает чётное число очков»;
- в) *C*: «выпадает нечётное число очков»;
- г) *D*: «выпадает число очков, кратное 3».

163. *Задачи Даламбера.* а) Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

б) Монета бросается три раза. Какова вероятность того, что герб выпадет по крайней мере один раз?

164. Из ящика, где находятся 2 чёрных и 5 белых шаров, вынут наугад один шар. Какова вероятность того, что вынут:

- а) чёрный шар;
- б) белый шар?

165. Подбросьте монету 50 раз. Сколько раз выпал орёл?

166. На двух карточках написали буквы А и Д, положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке (рис. 19, а). Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится слово «ДА» (рис. 19, б)?

167. На трёх карточках написали буквы Е, Н, Т, положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке. Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится слово «НЕТ»?

168. На четырёх карточках написали буквы К, О, Л, Я, положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке. Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится имя КОЛЯ?

169. На четырёх карточках написали буквы А, С, А, Ш, положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке. Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится имя САША?

170. Синоптики обещают на следующей неделе 2 солнечных дня и 5 пасмурных. Какое событие более вероятно: «воскресенье — солнечный день» или «воскресенье — пасмурный день»?

171. Из 28 костей домино выбирают наугад одну кость (на рисунке 20 изображена кость с суммой очков 11). Какова вероятность выбрать кость с суммой очков:

- а) 0;
- б) 2;
- в) 6;
- г) 10?

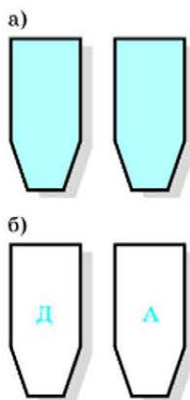


Рис. 19

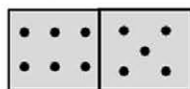


Рис. 20

172. Бросают игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет число очков:

- а) делящееся и на 2, и на 3;
- б) делящееся на 2 и не делящееся на 3;
- в) делящееся на 3 и не делящееся на 2;
- г) не делящееся ни на 2, ни на 3;
- д) делящееся или на 2, или на 3?

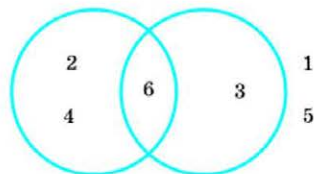


Рис. 21

Указание. Решите задачу, используя рисунок 21.

***173.** Бросают два игральных кубика. Какова вероятность события:

- а) A : «сумма очков равна 2»;
- б) B : «сумма очков равна 10»;
- в) C : «сумма очков равна 12»;
- г) D : «сумма очков равна 13»;
- д) E : «сумма очков равна 1»;
- е) F : «сумма очков равна одному из натуральных чисел 2, 3, ..., 11, 12»?

174. В первом ряду микроавтобуса имеется только 3 места. На них собираются шесть двое мужчин и одна женщина. Какова вероятность того, что мужчины окажутся рядом?

***175.** Бросают две монеты. Если выпадут два орла, то выиграл 1-й, если выпадут орёл и решка, то выиграл 2-й. Справедлива ли эта игра?

***176.** Бросают два игральных кубика. Если сумма очков 11 — выиграл 1-й, если сумма очков 12 — выиграл 2-й. Справедлива ли эта игра?

Придумываем задачу

***177.** Придумайте справедливую и несправедливую игру:
а) с двумя игральными кубиками; б) с двумя монетами.

***178.** Витя задумал число, записанное цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения. Коля пытается это число угадать. Какова вероятность того, что Коля угадает число с первого раза, если это число:
а) двузначное; б) трёхзначное; в) четырёхзначное?

***179.** Коля задумал число, записанное цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без повторения. Витя пытается это число угадать. Какова вероятность того, что Витя угадает число с первого раза, если это число: а) двузначное; б) трёхзначное; в) четырёхзначное?

При решении разнообразных практических задач часто приходится сравнивать однородные величины между собой, вычислять их отношения. Долгое время под числом понималось только натуральное число (собрание единиц), полученное в результате счёта. Отношение как результат деления одного числа на другое не считалось числом. Новое определение числа было дано впервые английским учёным Исааком Ньютоном (1643—1727). В своей «Всеобщей арифметике» он писал: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Слово «пропорция» (от лат. *proportio*) означает соразмерность, определённое соотношение частей между собой. В древности учение о пропорциях было в большом почёте у пифагорейцев. С пропорциями они связывали мысли о порядке и красоте в природе, о созвучных аккордах в музыке и гармонии во вселенной. В VII книге «Начал» Евклида (III в. до н. э.) изложена теория отношений и пропорций. Из пропорции, которую в современной записи мы записываем так: $a : b = c : d$, Евклид выводит производные пропорции (здесь $a \neq b$, $c \neq d$):

$$\begin{array}{lll} b : a = d : c, & (a + b) : b = (c + d) : d, & a : (a - b) = c : (c - d) \\ a : c = b : d, & (a - b) : b = (c - d) : d, & \end{array}$$

и доказывает основное свойство пропорций.

Известный нам способ записи пропорций появился не сразу. Ещё в XVII веке французский учёный Р. Декарт (1596—1650) записывал пропорцию $7 : 12 = 84 : 144$ так: $|7|12|84|144|$.

Современная запись пропорции с помощью знаков деления и равенства была введена немецким учёным Г. Лейбницем (1646—1716) в 1693 году.



И. Ньютон



А. Н. Колмогоров



П. Л. Чебышёв

Ещё в древние времена существовала практика дачи денег взём (в долг). Заёмщик, возвращая долг, платил за пользование займом некоторую заранее оговорённую сумму с каждых 100 взятых денежных единиц: «со ста» (*pro cento* — лат.). Так возник термин «процент». Задачи на заёмные расчёты были настолько важными, что их включали в учебники арифметики, сокращая слово *cento* так: ${}^c t_o$. Считают, что однажды наборщик типографии неправильно набрал это сокращение и получился знак %, который теперь широко используется.

Реже, чем слово «процент», используют слово «промилле», означающее одну тысячную часть числа или величины, и соответствующий знак: ‰.

В работах Б. Паскаля (1623—1662), П. Ферма (1601—1665) и других математиков XVII века были заложены основы новой математической теории — теории вероятностей. Во второй половине XIX века основополагающий вклад в теорию вероятностей внесли русские учёные П. Л. Чебышёв (1821—1894), А. А. Марков (1856—1922) и др. К настоящему времени в России сложилась сильная школа теории вероятностей. Крупнейшим её представителем являлся Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987). А. Н. Колмогоров был выдающимся учёным XX столетия, внёсшим большой вклад во многие разделы математики и её приложений. Много внимания уделял А. Н. Колмогоров проблемам школьного математического образования. Им была основана школа-интернат физико-математического профиля при МГУ для способных школьников всей страны. Теперь эта школа носит имя А. Н. Колмогорова.

4 АНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

- *180. Пруд зарастает лилиями — за неделю площадь, занятая лилиями, удваивается. За сколько недель пруд покрылся лилиями наполовину, если полностью он покрылся лилиями за 8 недель?
- *181. Некоторый вид бактерий размножается со скоростью 1 деление в минуту (каждую минуту каждая бактерия раздваивается). Если посадить 1 бактерию в пустой сосуд, то он наполнится за 1 ч. За какое время наполнится сосуд, если в него сначала посадить 2 бактерии?
- *182. 3 курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 куриц за 12 дней?
- *183. 100 синиц за 100 дней съедают 100 кг зерна. Сколько килограммов зерна съедят 10 синиц за 10 дней?
- *184. 3 маляра за 5 дней могут покрасить 60 окон. Сколько окон покрасят 5 маляров за 4 дня?

- 185.** 2 землекопа за 2 ч выкопают 2 м канавы. Сколько землекопов за 5 ч выкопают 5 м канавы?
- 186.** Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона. Если писец может за 8 дней написать 15 листов, сколько понадобится писцов, чтобы написать 405 листов за 9 дней?
- 187.** Переписчик в течение 4 дней может переписать 40 листов, работая по 9 ч в день. Во сколько дней он перепишет 60 листов, работая по 12 ч в день?
- 188.** У хозяйки спросили: «Хорошо ли несутся ваши куры?» — «Считайте сами, — был ответ, — полторы курицы за полтора дня несут полтора яйца, а всего у меня 12 кур». Сколько яиц несут куры в день?
- 189.** Зарплата в 100 условных единиц повысилась на 10 %, потом ещё на 10 %. На сколько процентов повысилась зарплата за 2 раза?
- 190.** Цена товара в 100 условных единиц понизилась на 10 %, потом ещё на 10 %. На сколько процентов понизилась цена товара за 2 раза?
- 191.** Цена товара в 100 условных единиц сначала понизилась на 10 %, потом повысилась на 10 %. На сколько процентов понизилась или повысилась цена товара за 2 раза?
- 192.** Цена товара в 100 условных единиц сначала повысилась на 10 %, потом понизилась на 10 %. На сколько процентов понизилась или повысилась цена товара за 2 раза?
- 193.** Известно, что площади равных фигур равны и площадь фигуры равна сумме площадей составляющих её частей. Вычислите площадь (рис. 22): а) прямоугольника $ABCD$; б) треугольника ABC ; в) треугольника ADC .
- 194.** Вычислите площадь многоугольника (длины сторон в сантиметрах указаны на рисунке 23).

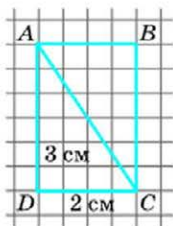


Рис. 22

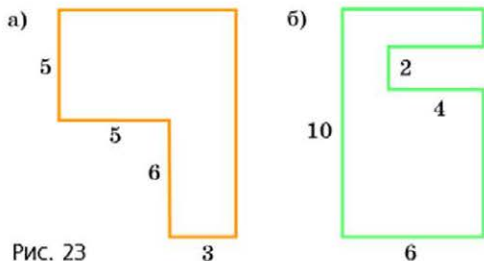


Рис. 23

ИССЛЕДУЕМ

- *195. Две фигуры называют **равновеликими**, если их площади равны.
- Постройте прямоугольник со сторонами 6 см и 4 см. Постройте два прямоугольника, равновеликие с построенным.
 - Какие стороны может иметь прямоугольник, равновеликий квадрату со стороной 8 см?
 - Какой наибольший периметр имеет прямоугольник, равновеликий квадрату со стороной 10 см?
- Стороны прямоугольников выражаются натуральными числами.

ДОКАЗЫВАЕМ

- *196. Две равные фигуры наложили друг на друга (рис. 24). Докажите, что площади закрашенных фигур равны.

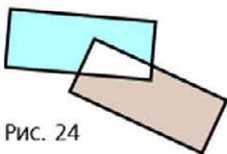


Рис. 24

- *197. Вычислите площадь треугольника (рис. 25).
- *198. На рисунке 26 изображён **параллелограмм** (четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны). Вычислите его площадь, если $AD=3$ см, $BK=2$ см.
- *199. На рисунке 27 изображена **трапеция** (четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие — не параллельны). Вычислите её площадь, если $AD=5$ см, $BC=2$ см, $BK=2$ см.

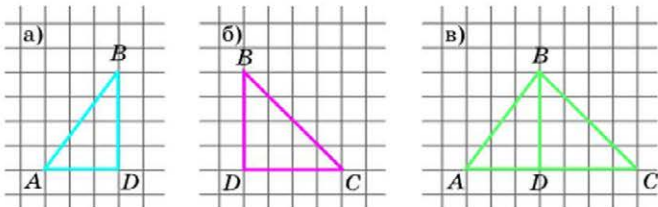


Рис. 25

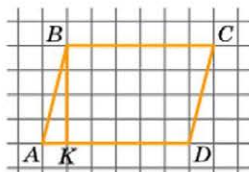


Рис. 26

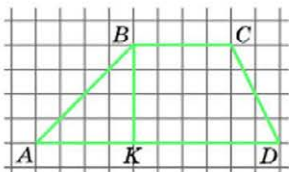


Рис. 27

Изучая главу 2, вы познакомитесь с целыми числами, научитесь их сравнивать, выполнять все арифметические действия с ними. Множество целых чисел включает в себя множество натуральных чисел. Вам предстоит убедиться, что для целых чисел выполняются те же законы сложения и умножения, что и для натуральных, и целые числа, как и натуральные, можно изображать точками координатной оси. С применением целых чисел в быту вы уже знакомы (термометр), скоро вы убедитесь, что отрицательные числа используются при изучении не только математики, но и других школьных предметов.

2.1. Отрицательные целые числа

Термометр, изображённый на рисунке 28, показывает температуру 7° тепла. Если температура понизится на 4° , то термометр будет показывать 3° тепла. Уменьшению температуры соответствует действие вычитания:

$$7 - 4 = 3.$$

Если температура понизится на 7° , то термометр будет показывать 0° . Уменьшению температуры соответствует действие вычитания:

$$7 - 7 = 0.$$

Если же температура понизится на 8° , то термометр покажет -1° (1° мороза). Но результат вычитания $7 - 8$ нельзя записать с помощью натуральных чисел и нуля, хотя он имеет реальный смысл.



Рис. 28

Проиллюстрируем вычитание на ряде целых неотрицательных чисел.

- 1) От числа 7 отсчитаем влево 4 числа и получим 3:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots \quad 7 - 4 = 3.$$

- 2) От числа 7 отсчитаем влево 7 чисел и получим 0:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots \quad 7 - 7 = 0.$$

Отсчитать в ряду неотрицательных целых чисел от числа 7 влево 8 чисел нельзя. Чтобы действие $7 - 8$ стало выполнимым, расширим ряд неотрицательных целых чисел. Для этого влево от нуля запишем (справа налево) по порядку все натуральные числа, добавляя к каждому из них знак «-», показывающий, что это число стоит слева от нуля.

Записи $-1, -2, -3, \dots$ читают «минус 1», «минус 2», «минус 3» и т. д.:

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Полученный ряд чисел называют рядом целых чисел. Точки слева и справа в этой записи означают, что ряд можно продолжать неограниченно вправо и влево.

Справа от числа 0 в этом ряду расположены числа, которые называют натуральными или целыми положительными.

Слева от числа 0 в этом ряду расположены числа, которые называют целыми отрицательными.

Число 0 не является ни положительным, ни отрицательным числом. Оно разделяет положительные и отрицательные числа.

Таким образом, ряд целых чисел образуют натуральные числа, целые отрицательные числа и число нуль.

Ряд целых чисел является бесконечным множеством, а часть этого ряда — все целые числа, заключённые между какими-нибудь двумя заданными целыми числами, — является конечным множеством.

200. Можно ли проиллюстрировать на ряде неотрицательных чисел вычитание:

- а) $7 - 4$; б) $7 - 7$; в) $7 - 8$?

201. Как получить ряд целых чисел?

- 202.** Как называют числа, расположенные в ряду целых чисел:
а) справа от нуля; б) слева от нуля?
- 203.** Является ли число 0: а) положительным; б) отрицательным?
- 204.** Прочитайте числа: $+2$, -3 , 0 , $+7$, -9 .
а) Какие из этих чисел расположены в ряду целых чисел справа от нуля; слева от нуля?
б) Какие из этих чисел являются положительными; отрицательными?
- 205.** Прочитайте записи и объясните их смысл:
Москва -2° , Калуга -8° ,
Тверь $+3^\circ$.
- 206.** Используя знаки «+» и «-», запишите:
а) 3° тепла; б) 4° тепла; в) 6° выше нуля;
г) 2° мороза; д) 5° ниже нуля; е) 1° холода.
- 207.** Приведите пример:
а) конечного множества чисел;
б) бесконечного множества чисел.



2.2. Противоположные числа.

Модуль числа

Считают, что если перед целым числом поставить знак «+», то это не изменяет самого числа.

Например, число 5 можно записать как $+5$, число -5 как $+(-5)$:

$$5 = +5, \quad -5 = +(-5).$$

Поэтому ряд целых чисел можно записать в виде:

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots$$

Числа, которые отличаются только знаком, называют **противоположными**.

Например, $+1$ и -1 , -5 и $+5$, $+10$ и -10 — противоположные числа.

Если перед целым числом поставить знак «-», то получится число, ему противоположное:

$$-(+1)=-1, \quad -(-2)=+2.$$

Нуль считается противоположным самому себе: $0=-0=+0$.

Число, противоположное числу a , обозначают $-a$. Заметим, что число $-a$ может быть положительным, отрицательным или нулём. Например, если $a=+2$, то $-a=-2$, так как $-(+2)=-2$; если $a=-3$, то $-a=+3$, так как $-(-3)=+3$; если $a=0$, то $-a=0$, так как $-0=0$.

Введём понятие модуля, или абсолютной величины числа.

Модулем положительного числа называют само это число.

Например, модулем числа $+3$ является число $+3$, пишут:

$$|+3|=+3.$$

Модулем отрицательного числа называют противоположное ему (положительное) число.

Например, модулем числа -4 является число $+4$, пишут:

$$|-4|=+4.$$

Таким образом,

модуль целого, отличного от нуля числа есть положительное число.

Противоположные числа имеют одинаковый модуль:

$$|a|=|-a|.$$

Например, $|+3|=|-3|=+3$, $|-5|=|+5|=+5$.

Модулем числа 0 является число 0 , пишут: $|0|=0$.

- 208.** Какие числа называют противоположными? Приведите примеры противоположных чисел.
- 209.** Какое число противоположно числу 0 ?
- 210.** Что получится, если перед целым числом поставить:
а) знак «+»; б) знак «-»?
- 211.** Что называют модулем:
а) положительного целого числа;
б) отрицательного целого числа;
в) числа нуль?
- 212.** Какие числа имеют одинаковый модуль? Приведите примеры.
- 213.** Для какого числа модуль — противоположное ему число?

214. Запись $-(-2)$ читают так: «число, противоположное минус двум» или «минус минус 2». Прочитайте запись числа и упростите её по образцу:

а) $+(+2)=+2$; б) $-(-2)=+2$;

в) $+(-2)$; г) $+(-3)$; д) $-(+3)$; е) $-(-3)$; ж) $-(+8)$; з) $-(-10)$.

215. Какие числа получатся, если перед числами $-1, 3, 0, -6, 7$ поставить: а) знак «+»; б) знак «-»?

216. Какие из чисел $-5, 6, 8, -10, 0, +4, -0$ являются: а) положительными; б) отрицательными?

217. Заполните пропуски, прочитайте полученную запись:

а) $|+1| = \dots$; б) $|-6| = \dots$; в) $|0| = \dots$;
г) $|-3| = \dots$; д) $|+7| = \dots$; е) $|-8| = \dots$.

218. Найдите модули чисел: $+2, -2, +5, -5, +8, -10, +100, +0, -3$.

219. Укажите два различных числа, модули которых равны.

220. Для каждого из чисел $2, 5, -3, 10, -17$ укажите другое число, имеющее тот же модуль.

221. Назовите два противоположных числа, имеющих модуль: а) 2; б) 7; в) 9; г) 8.

Выполните действия (**222–224**):

222. а) $|+6| + |+7|$; б) $|-9| + |-8|$;

в) $|-6| + |+7|$; г) $|+8| + |+9|$.

223. а) $|-9| - |-6|$; б) $|-5| - |+3|$;

в) $|-20| - |-6|$; г) $|-17| - |-8|$.

224. а) $|-7| + |+5| + |+8| + |-10|$;

б) $|+12| + |-2| - |+10| + |-9|$;

в) $|+18| + |-2| - |-5| - |-15|$;

г) $|-10| + |-2| - |-8| + |-5|$.

225. Назовите число, модуль которого равен: а) $+5$; б) $+8$; в) $+1$; г) 0 .
Сколько таких чисел можно назвать?

226. Если целое число обозначено буквой a , то противоположное ему число обозначают $-a$. Заполните таблицу.

a	5	-3			7		-9
$-a$			-2	6		-8	

- 227.** Всегда ли модуль числа равен самому числу, т. е. $|a| = a$? Для каких чисел это равенство верно?
- 228.** Всегда ли модуль числа равен противоположному числу, т. е. $|a| = -a$? Для каких чисел это верно?
- 229.** Для какого числа выполняются оба условия: $|a| = a$ и $|a| = -a$?
- 230.** Верно ли, что $|-a| = |a|$?
- 231.** Маша по ошибке считает, что $(-a)$ — это запись отрицательного числа. Назовите такое число a , чтобы число $(-a)$ было:
а) положительным; б) отрицательным; в) нулём.

2.3. Сравнение целых чисел

Из двух целых чисел больше то, которое в ряду целых чисел стоит правее.

Если a больше b , то пишут $a > b$ или $b < a$.

Например, $1 > -1$, $-2 > -6$, $0 > -5$, $-6 < -3$, $-10 < 2$, так как в ряду целых чисел

$\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots$

1 правее (-1) , (-2) правее (-6) и т. д.

Из правила сравнения целых чисел следует, что

любое положительное число больше 0, а любое отрицательное число меньше 0; любое положительное число больше любого отрицательного.

Отрицательные числа удобно сравнивать с помощью их модулей. Так как в ряду целых чисел отрицательное число с большим модулем стоит левее, то

из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Например, так как $|-2| < |-6|$, то $-2 > -6$.

Если числа a и b не равны друг другу, то пишут: $a \neq b$. Например, $5 \neq 3$, $-2 \neq 0$, $-7 \neq +7$.

- 232.** Сравните натуральные числа:
а) 425 и 452; б) 999 и 1000; в) 579 и 957;
г) 12 456 и 12 459; д) 1300 и 1297; е) 13 547 и 1354.

233. Как сравнивают целые числа?

234. Какие числа: а) больше нуля; б) меньше нуля?

235. Какое число больше: положительное или отрицательное?

236. Сформулируйте правило сравнения:

- а) целого числа с нулём;
б) положительного числа с отрицательным;
в) отрицательного числа с отрицательным.

237. Существует ли:

- а) наибольшее натуральное число;
б) наименьшее натуральное число;
в) наибольшее отрицательное целое число;
г) наименьшее отрицательное целое число;
д) наибольшее целое число;
е) наименьшее целое число?

Сравните числа (**238–240**):

238. а) 5 и 0; б) -5 и 0; в) 7 и 0;
г) -7 и 0; д) 8 и -7; е) -3 и 100.

239. а) -9 и -6; б) -3 и -20; в) -7 и -15;
г) -25 и -1; д) -20 и 0; е) 0 и -40;
ж) -8 и 13; з) 128 и -300; и) -5 и -6.

240. а) 728 и 800; б) -296 и 1; в) -999 и 2;
г) 0 и -500; д) 725 и 0; е) -600 и -5;
ж) -856 и -100; з) -51 и -510; и) 326 и 32.

241. Запишите числа в порядке возрастания:

а) 400, -400, 0, 236, -528; б) 752, 0, -35, -257, 432.

242. Запишите числа в порядке убывания:

а) -250, 367, 0, -8, 12, -400;
б) -790, 790, 0, -9, -12, 425.

243. Найдите разность:

а) $|+5| - |-5|$; б) $|-5| - |+5|$;
в) $|+3| - |-3|$; г) $|-3| - |+3|$.

244. Верно ли утверждение: если $a > b$, то $|a| > |b|$?

245. Верно ли утверждение: если $a > b$, то $|a| < |b|$?

246. Может ли быть так, чтобы $a \neq b$, но $|a| = |b|$? Приведите примеры. Как называют такие числа a и b ?



- 247.** Объясните с помощью ряда неотрицательных чисел, почему если для целых чисел a , b и c верны неравенства $a > b$ и $b > c$, то верно неравенство $a > c$.

2.4. Сложение целых чисел


Сумма целых чисел a и b ($b \neq 0$) есть целое число c , отстоящее в ряду целых чисел от a на $|b|$ чисел **вправо**, если $b > 0$, и **влево**, если $b < 0$. При этом числа a и b называют слагаемыми и пишут:

$$c = a + b.$$

Примечание. При $a > 0$ и $b > 0$ этим определением мы уже пользовались, когда определяли сложение натуральных чисел.

Пример 1. Определим сумму $(+3) + (+6)$.

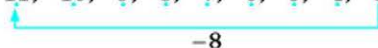
Решение. Так как $+6 > 0$ и $|+6| = 6$, то от числа $+3$ в ряду целых чисел отсчитаем **вправо** 6 чисел:

$$\dots, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, \dots$$


Таким образом, $(+3) + (+6) = +9$.

Пример 2. Определим сумму $(-3) + (-8)$.

Решение. Так как $-8 < 0$ и $|-8| = 8$, то от числа -3 в ряду целых чисел отсчитаем **влево** 8 чисел:

$$\dots, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, \dots$$


Таким образом, $(-3) + (-8) = -11$.

Рассмотренные примеры подтверждают правило:

чтобы сложить два числа одинаковых знаков, надо сложить их модули и поставить перед суммой знак слагаемых.

Ещё раз подчеркнём, что

сумма положительных чисел есть число положительное, а сумма отрицательных чисел есть число отрицательное.

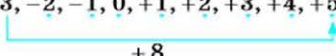
На основании этого правила имеем:

$$(+7) + (+9) = +(7+9) = +16 = 16, \quad (-2) + (-3) = -(2+3) = -5.$$

Пример 3. Определим сумму $(-3) + (+8)$.

Решение. Так как $+8 > 0$ и $|+8| = 8$, то от числа -3 в ряду целых чисел отсчитаем вправо 8 чисел:

$$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, \dots$$



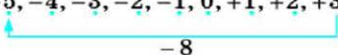
Таким образом, $(-3) + (+8) = +5$.

Заметим, что модуль положительного слагаемого больше модуля отрицательного слагаемого, а сумма — положительное число, равное $|+8| - |-3|$.

Пример 4. Определим сумму $(+3) + (-8)$.

Решение. Так как $-8 < 0$ и $|-8| = 8$, то от числа $+3$ в ряду целых чисел отсчитаем влево 8 чисел:

$$\dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots$$



Таким образом, $(+3) + (-8) = -5$.

Здесь модуль отрицательного слагаемого больше модуля положительного слагаемого, а сумма — отрицательное число, равное $- (|-8| - |+3|)$.

Рассмотренные примеры подтверждают правило:

чтобы сложить два числа разных знаков и с разными модулями, надо из большего модуля вычесть меньший и перед разностью поставить знак слагаемого с большим модулем.

На основании этого правила имеем:

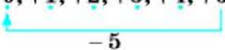
$$(+17) + (-20) = -(20 - 17) = -3, \text{ так как } |-20| > |+17|;$$

$$(-2) + (+1) = -(2 - 1) = -1, \text{ так как } |-2| > |+1|.$$

Пример 5. Определим сумму $(+5) + (-5)$.

Решение. Так как $-5 < 0$ и $|-5| = 5$, то от числа $(+5)$ в ряду целых чисел отсчитаем влево 5 чисел, получим число 0:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \dots$$



Таким образом, $(+5) + (-5) = 0$.

Этот пример подтверждает правило:

сумма противоположных чисел равна нулю.

$$a + (-a) = 0.$$

На основании этого правила имеем:

$$(+3) + (-3) = 0, \quad (-7) + (+7) = 0.$$

Для любого целого числа a :

$$a + 0 = a, \quad 0 + a = a.$$

Например, $0 + (-3) = -3$; $(+5) + 0 = +5$; $0 + 0 = 0$.

Чтобы найти сумму нескольких чисел, нужно найти сумму двух первых чисел, к ней прибавить третье число и т. д.

248. С помощью ряда целых чисел определите сумму:
а) $(+3) + (+2)$; б) $(+3) + (-2)$; в) $(-3) + (+2)$; г) $(-3) + (-2)$.

249. Как сложить два числа:
а) с одинаковыми знаками; б) с разными знаками?

250. Чему равна сумма противоположных чисел?

251. Чему равна сумма целого числа и нуля?

252. Используя правило сложения, вычислите:

$$\text{а) } +7 + (+9) = +(7+9) = \dots; \quad \text{б) } -4 + (-6) = -(6+4) = \dots;$$

$$\text{в) } -5 + (-6); \quad \text{г) } -5 + (-9); \quad \text{д) } -6 + (-1); \quad \text{е) } -1 + (-6).$$

Вычислите (**253–254**):

253. а) $-1 + (-2)$; б) $-2 + (-1)$; в) $-2 + (-4)$;
г) $-5 + (-1)$; д) $-3 + (-8)$; е) $-4 + (-11)$.

254. а) $-9 + (-2)$; б) $-7 + (-3)$; в) $-13 + (-8)$;
г) $+12 + (+23)$; д) $-25 + (-7)$; е) $+18 + (+42)$.

255. Используя правило сложения, вычислите:

$$\text{а) } +7 + (-6) = +(7-6) = +1, \text{ так как } |7| > |-6|;$$

$$\text{б) } -18 + (+12) = -(18-12) = -6, \text{ так как } |-18| > |12|$$

$$\begin{array}{lll} \text{в) } -8 + (+9); & \text{г) } +8 + (-9); & \text{д) } +12 + (-15); \\ \text{е) } -13 + (+18); & \text{ж) } -2 + (+18); & \text{з) } +25 + (-32). \end{array}$$

256. Найдите сумму:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } -1 + (+2); & \text{б) } +5 + (-2); & \text{в) } -4 + (+1); \\ \text{г) } -8 + (+2); & \text{д) } +7 + (-9); & \text{е) } -10 + (+4). \end{array}$$

Замечание. Для упрощения записи суммы у положительных слагаемых обычно опускают знак «+» и скобки. Например, вместо $+3 + (+8)$ пишут $3 + 8$, т. е.

$$+3 + (+8) = 3 + 8.$$

Аналогично $-5 + (+9) = -5 + 9$.

257. Упростите запись суммы:

а) $-5 + (+7) = -5 + 7$;

б) $-8 + (+9)$;

в) $-9 + (+7)$;

г) $+3 + (+7)$;

д) $+8 + (-13)$;

е) $+9 + (-17)$.

258. Назовите знак каждого слагаемого:

а) $-5 + 8$; б) $5 + 7$; в) $-13 + (-9)$; г) $-91 + 26$; д) $-95 + (-13)$.

Вычислите по образцу (**259–263**):

$-755 + (-983) = -(755 + 983) = -1738$

$$\begin{array}{r} 755 \\ + 983 \\ \hline 1738 \end{array}$$

259. а) $-102 + (-98)$;

б) $-33 + (-167)$;

в) $-128 + (-12)$;

г) $688 + 957$;

д) $-172 + (-118)$;

е) $694 + 738$.

260. а) $-354 + (-293)$;

б) $-293 + (-354)$;

в) $784 + 951$;

г) $-728 + (-256)$;

д) $487 + 954$;

е) $(-259) + (-728)$.

261. а) $-7825 + (-3517)$;

б) $7903 + 484$;

в) $-35 + (-8094)$.

262. а) $359 + (-483)$;

б) $-703 + 117$;

в) $-14 + 864$;

г) $151 + (-87)$;

д) $17 + (-256)$;

е) $476 + (-253)$.

263. а) $-170 + (-250)$;

б) $-350 + 480$;

в) $7805 + (-454)$;

г) $1306 + (-2514)$;

д) $-8576 + (-1720)$;

е) $-6060 + 3903$.

264. Вычислите по образцу:

а) $-5 + (-3) + 2 = -(5 + 3) + 2 = -8 + 2 = -6$;

б) $3 + (-7) + (-8) + 6 = -4 + (-8) + 6 = -12 + 6 = -6$;

в) $-8 + 3 + (-1)$;

г) $-7 + (-2) + (-10)$;

д) $8 + (-9) + (-7)$;

е) $-3 + (-4) + (-5) + (-6)$;

ж) $-4 + 8 + (-9) + 3$;

з) $8 + (-10) + (-12) + 3$.

2.5. Законы сложения целых чисел

Для любых целых чисел a и b выполняется переместительный закон сложения:

сумма двух целых чисел не зависит от порядка слагаемых:

$$a + b = b + a.$$

Например, $-3 + (-5) = -5 + (-3)$.

Для любых целых чисел a , b и c справедлив **сочетательный закон сложения**:

чтобы к сумме двух целых чисел прибавить третье целое число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего — результат будет тот же:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Например, $(2 + 5) + (-3) = 2 + (5 + (-3))$.

Справедливость переместительного и сочетательного законов сложения целых чисел можно показать, используя правила сложения целых чисел и справедливость этих законов для натуральных чисел.

Например, чтобы доказать, что суммы $-3 + (-5)$ и $-5 + (-3)$ равны, заметим, что каждая из них отрицательна и модуль каждой из них находится сложением модулей слагаемых: $3 + 5$ и $5 + 3$. А на основании переместительного закона сложения для натуральных чисел суммы $3 + 5$ и $5 + 3$ равны. Значит, равенство $-3 + (-5) = -5 + (-3)$ верно.

В справедливости этих законов можно убедиться и с помощью ряда целых чисел.

С помощью переместительного и сочетательного законов сложения можно показать, что сумму нескольких целых слагаемых:

- 1) можно записывать без скобок,
- 2) любые слагаемые в ней можно менять местами,
- 3) некоторые слагаемые в ней можно заключать в скобки.

Например, верно равенство $a + b + c + k = (c + k) + (a + b)$.

Докажем это:

$$\begin{aligned} a + b + c + k &= (a + b + c) + k = k + (a + b + c) = k + ((a + b) + c) = \\ &= k + (c + (a + b)) = (k + c) + (a + b) = (c + k) + (a + b). \end{aligned}$$

Приведённые выше правила применяются для упрощения вычислений. Например,

$$\begin{aligned} &3 + (-6) + (-4) + 6 + (-5) + 4 = \\ &= (3 + (-5)) + ((-6) + 6) + (4 + (-4)) = -2 + 0 + 0 = -2. \end{aligned}$$

265. Запишите для целых чисел a и b переместительный закон сложения, сформулируйте его.

266. Запишите для целых чисел a , b и c сочетательный закон сложения, сформулируйте его.

267. Вычислите, применяя законы сложения:

- а) $5 + 798 + 35$; б) $(723 + 59) + 17$;
в) $357 + 48 + 13$; г) $488 + (596 + 12)$.

268. Выполните сложение и сравните результаты:

- а) $-5 + (-9)$ и $-9 + (-5)$; б) $48 + (-36)$ и $(-36) + 48$;
в) $-25 + 16$ и $16 + (-25)$; г) $-8 + (18 + (-7))$ и $(-8 + 18) + (-7)$;
д) $13 + (-6 + (-7))$ и $(13 + (-6)) + (-7)$.

269. Примените переместительный закон сложения:

а) $-45 + (-10) = -10 + (-45)$;

- б) $8 + (-35)$; в) $-13 + 49$; г) $-17 + (-23)$.

270. Примените сочетательный закон сложения:

а) $42 + (-3 + 7) = (42 + (-3)) + 7$;

- б) $56 + (-16 + 7)$; в) $(-52 + 17) + (-9)$; г) $-13 + (-8 + 25)$.

271. Заполните пропуски:

- а) $3 + 5 + (-8) = 3 + (-8) + \dots$;
б) $6 + \dots + (-1) = (-1) + (6 + (-2))$;
в) $-1 + \dots + 3 = (3 + (-7)) + \dots$;
г) $-4 + \dots + (-7) = 2 + (\dots + (-4))$.

272. Вычислите, применяя законы сложения:

- а) $49 + ((-49) + 22)$; б) $-12 + (12 + (-29))$;
в) $(47 + (-58)) + (-47)$; г) $(124 + 59) + (-24)$;
д) $-56 + 17 + (-27)$; е) $49 + (-72) + 62$;
ж) $36 + (-51) + 14$; з) $-48 + (-19) + 28$.

273. Вычислите по образцу:

а) $-1 + 2 + (-3) + 5 = (2 + 5) + ((-1) + (-3)) = 7 + (-4) = \dots$;

- б) $-2 + (-4) + 2 + 5 + (-3) + 1 + (-3)$;
в) $20 + (-8) + 2 + 5 + (-10) + (-1) + (-3)$;
г) $-4 + (-1) + 3 + (-2) + (-3) + 9$;
д) $-17 + 17 + (-8) + 6 + (-2) + 8$;
е) $4 + (-6) + (-1) + (-4) + 6 + (-3) + 1$.

Вычислите, применяя законы сложения (**274–275**):

***274.**

- а) $(-1) + (-2) + (-3) + (-4) + 4 + 3 + 2 + 1$;
б) $(-7) + (-5) + (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 + 7$;
в) $(-10) + (-9) + (-8) + (-7) + \dots + 7 + 8 + 9 + 10$;
г) $(-100) + (-99) + (-98) + \dots + 98 + 99 + 100$.

- *275. а) $1 + (-2) + 3 + (-4) + \dots + 9 + (-10)$;
 б) $1 + (-2) + 3 + (-4) + \dots + 99 + (-100)$;
 в) $(-1) + 2 + (-3) + 4 + \dots + (-9) + 10$;
 г) $(-1) + 2 + (-3) + 4 + \dots + (-99) + 100$.
- *276. Даны числа: 9, -11, 10. Убедитесь, что сумма любых двух соседних чисел отрицательна, а сумма всех трёх чисел положительна. Напишите в строчку три числа так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма трёх чисел была отрицательна.
- *277. Убедитесь, что для чисел 5, -4, -2, 5, -4, -2, 5 сумма любых трёх соседних чисел отрицательна, а сумма всех чисел положительна. Напишите в строчку семь чисел так, чтобы сумма любых трёх соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна.
278. Запишите и вычислите:
 а) сумму чисел 17 и -23;
 б) сумму чисел -20 и 4;
 в) сумму числа, противоположного -13, и числа -225;
 г) сумму числа -26 и числа, противоположного -12.
279. К числу a прибавьте число, противоположное b :
 а) $a = 12$, $b = -7$; б) $a = 13$, $b = 16$; в) $a = 15$, $b = 7$;
 г) $a = 24$, $b = 13$; д) $a = -14$, $b = 7$; е) $a = -29$, $b = 40$;
 ж) $a = -24$, $b = -13$; з) $a = -16$, $b = -18$.
280. Перепишите, заменив x числом так, чтобы получилось верное равенство:
 а) $(-6) + (-7) = x$; б) $-8 + x = -10$; в) $-8 + x = -3$;
 г) $-8 + x = 0$; д) $-8 + x = -8$; е) $x + 5 = 10$;
 ж) $x + 5 = 0$; з) $x + 5 = -3$; и) $x + 5 = -8$.

2.6. Разность целых чисел

Разностью двух целых чисел называют целое число, которое в сумме с вычитаемым даёт уменьшаемое.

Разность целых чисел a и b обозначают $a - b$. Покажем, что

разность $a - b$ есть сумма числа a и числа, противоположного числу b :

$$a - b = a + (-b).$$

Чтобы доказать это, надо найти сумму чисел $a + (-b)$ и b . Применяя сочетательный закон сложения, получаем

$$(a + (-b)) + b = a + ((-b) + b) = a + 0 = a.$$

Таким образом,

чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

Например,

$$\begin{aligned} -3 - (-5) &= -3 + 5 = 2, & 2 - 7 &= 2 + (-7) = -5, & 0 - 5 &= 0 + (-5) = -5, \\ -7 - 2 &= -7 + (-2) = -9, & 0 - 0 &= 0 + (-0) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Сумму нескольких целых чисел часто записывают без скобок, например: $(+3) + (-7) + (-4) = 3 - 7 - 4$.

Отметим, что в множестве натуральных чисел нельзя было из меньшего числа вычесть большее. В множестве целых чисел это возможно. Например,

$$2 - 7 = 2 + (-7) = -(7 - 2) = -5.$$

281. Что называют разностью чисел a и b ?

282. Какой сумме равна разность $a - b$?

283. Применяя определение разности, проверьте, верно ли равенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } +28 - (+9) = 14; & \text{б) } +7 - (+12) = -5; \\ \text{в) } -2 - (-3) = 1; & \text{г) } -12 - (+1) = -11. \end{array}$$

284. Назовите уменьшаемое, вычитаемое и число, противоположное вычитаемому:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } +45 - (+63); & \text{б) } +27 - (-52); & \text{в) } -4 - (+19); \\ \text{г) } -41 - (+95); & \text{д) } -59 - (-11); & \text{е) } +32 - (-16). \end{array}$$

285. Замените разность чисел суммой уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } +25 - (-6) = +25 + (+6); & \text{б) } (-9) - (+45) = (-9) + (-45); \\ \text{в) } +47 - (+58); & \text{г) } (-36) - (+12); \\ \text{д) } +13 - (-27); & \text{е) } (-45) - (-59). \end{array}$$

Замечание. Для упрощения записи разности у положительных уменьшаемого и вычитаемого опускают скобки и знак «+».

Например, $+9 - (+3) = 9 - 3$; $-9 - (+3) = -9 - 3$; $+9 - (-3) = 9 - (-3)$.

286. Замените разность суммой:

а) $-5 - (+2) = -5 + (-2)$; б) $12 - (-7) = 12 + 7$;

в) $-6 - (-3)$; г) $9 - (+13)$; д) $17 - (+24)$;
е) $-13 - (-19)$; ж) $13 - (-27)$; з) $-15 - (+10)$.

Вычислите по образцу (**287–288**):

287. а) $9 - 10 = 9 + (-10) = -(10 - 9) = -1$;

б) $6 - 8$; в) $4 - 10$; г) $5 - 20$; д) $6 - 11$;
е) $8 - 13$; ж) $8 - 24$; з) $24 - 48$; и) $35 - 47$;
к) $64 - 71$; л) $91 - 119$; м) $62 - 89$; н) $67 - 105$.

288. а) $-3 - 7 = -3 + (-7) = -(3 + 7) = -10$;

б) $-4 - 8$; в) $-5 - 2$; г) $-8 - 14$; д) $-10 - 10$;
е) $-20 - 60$; ж) $-11 - 23$; з) $-28 - 17$; и) $-5 - 91$;
к) $-92 - 18$; л) $-240 - 14$; м) $-50 - 105$; н) $-200 - 400$.

289. Вычислите:

а) $-5 - 2$; б) $-1 - 3$; в) $-15 - 12$; г) $-6 - 14$; д) $-100 - 200$.

Вычислите по образцу (**290–291**):

290. а) $-1 - (-4) = -1 + 4 = 3$;

б) $-2 - (-2)$; в) $-3 - (-4)$; г) $-5 - (-2)$; д) $-8 - (-6)$; е) $9 - (-5)$.

291. а) $-794 - (-581) = -794 + 581 = -(794 - 581) = -213$; $\left\{ \begin{array}{r} -794 \\ \underline{581} \\ -213 \end{array} \right.$

б) $-824 - (-642)$; в) $-498 - (-402)$; г) $-864 - (-164)$;
д) $-1240 - (-200)$; е) $-1000 - (-2500)$; ж) $80 - (-1800)$.

292. Запишите сумму чисел без скобок по образцу:

а) $(-25) + (-42) = -25 - 42$;

б) $(-45) + (-12)$; в) $17 + (-3)$; г) $(-28) + (-49)$; д) $13 + (-45)$.

293. Вычислите сумму чисел:

а) $49 + (-23)$; б) $56 + (-63)$; в) $(-15) + (-40)$; г) $(-66) + (-28)$.

294. Вычислите:

а) $(-5 + 8) + 9$; б) $(14 - 18) - 7$; в) $96 - (-72 + 13)$;
г) $-75 - (-75 + 8)$; д) $79 + (48 - 79)$; е) $14 - (15 - 94)$.

295. Если a и b — натуральные числа, то верно ли, что их сумма и разность также являются натуральными числами?

296. Если a и b — целые числа, то верно ли, что их сумма и разность также являются целыми числами?

Вычислите наиболее простым способом (297—298):

297. а) $-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$;
 б) $-8 - 7 - 5 - 3 - 1 + 0 + 1 + 3 + 5 + 7 + 8 + 9$.

298. а) $-9 - 8 - 7 - \dots - 1 + 0 + 1 + \dots + 7 + 8 + 9 + 10$;
 б) $101 \ 100 \ 99 \ 98 \ \dots + 98 + 99 + 100$;
 в) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 9 - 10 + 11$;
 г) $1 \ 2 + 3 \ 4 + \dots + 99 \ 100$.

Для какого числа x верно равенство (299—300)?

299.	а) $x + 13 = 7$, $x = 7 - 13$, $x = -6$;	$7 - 13 = -(13 - 7) = -6$
-------------	---	---------------------------

б) $x + 8 = -7$; в) $-7 + x = 9$; г) $x - (-8) = 13$; д) $-15 - x = 7$.

300.	а) $-498 - x = -175$, $x = 498 - 175$, $x = 498 + 175$, $x = -323$;	$\begin{array}{r} -498 \\ +175 \\ \hline -323 \end{array}$
-------------	--	--

б) $79 + x = -356$; в) $x - 57 = -493$;
 г) $167 - x = 39$; д) $-542 + x = 542$.

301. Найдите сумму нескольких одинаковых слагаемых:

а) $\underbrace{(-5) + (-5) + \dots + (-5)}_6$;	б) $\underbrace{(-7) + (-7) + \dots + (-7)}_8$;
в) $\underbrace{(-10) + (-10) + \dots + (-10)}_9$;	г) $\underbrace{(-6) + (-6) + \dots + (-6)}_{11}$.

2.7. Произведение целых чисел

Произведением двух целых не равных нулю чисел называют произведение их модулей, взятое со знаком «+», если эти числа одинаковых знаков, и со знаком «-», если они разных знаков.

Например,

$$6 \cdot 8 = (+6) \cdot (+8) = +(6 \cdot 8) = +48, \quad (5) \cdot (10) = +(5 \cdot 10) = +50,$$

$$7 \cdot (-3) = (+7) \cdot (-3) = -(7 \cdot 3) = -21, \quad (-3) \cdot 3 = (-3) \cdot (+3) = -(3 \cdot 3) = -9.$$

Произведение любого целого числа a и нуля равно нулю:

$$a \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot a = 0.$$

$$\begin{aligned}\text{Например, } (+7) \cdot 0 &= 0 \cdot (+7) = 0, \\ (-10) \cdot 0 &= 0 \cdot (-10) = 0, \\ 0 \cdot 0 &= 0.\end{aligned}$$

Переместительный и сочетательный законы умножения верны для любых целых чисел:

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Из определения произведения целых чисел и выполнимости переместительного и сочетательного законов умножения для неотрицательных целых чисел следует, что эти законы выполняются и для целых чисел.

$$\begin{aligned}\text{Например, } (-5) \cdot (-6) &= +(5 \cdot 6) = +(6 \cdot 5) = (-6) \cdot (-5), \\ ((+5) \cdot (-3)) \cdot (-4) &= -(5 \cdot 3) \cdot (-4) = +((5 \cdot 3) \cdot 4) = \\ &= +(5 \cdot (3 \cdot 4)) = (+5) \cdot ((-3) \cdot (-4)).\end{aligned}$$

Отметим, что при умножении любого целого числа a на (-1) меняется только его знак, т. е. получается противоположное ему число:

$$(-1) \cdot a = -a.$$

$$\text{Например, } (-1) \cdot (+5) = -5, \quad (-1) \cdot (-5) = +5.$$

Чтобы найти произведение нескольких чисел, нужно найти произведение двух первых чисел, умножить его на третье число и т. д.

Для целых чисел степень числа с натуральным показателем определяется так же, как и для натуральных чисел.

Степенью числа a с натуральным показателем n ($n > 1$) называют произведение n множителей, каждый из которых равен a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \quad (n > 1).$$

Первая степень любого числа равна самому числу:

$$a^1 = a.$$

$$\begin{aligned}\text{Например, } 2^2 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32, \\ (-3)^2 &= (-3) \cdot (-3) = + (3 \cdot 3) = 9, \\ (-3)^3 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = - (3 \cdot 3 \cdot 3) = -27, \\ (7)^1 &= 7.\end{aligned}$$

302. а) Что называют произведением двух целых не равных нулю чисел?

б) Чему равно произведение любого целого числа и нуля?

в) Что называют степенью числа a с натуральным показателем n ?

303. Справедливы ли переместительный и сочетательный законы умножения для целых чисел? Сформулируйте их.

304. Что получится, если число умножить на (-1) ?

305. Вычислите столбиком:

а) $123 \cdot 9$;

б) $357 \cdot 8$;

в) $256 \cdot 32$;

г) $457 \cdot 48$;

д) $521 \cdot 32$;

е) $439 \cdot 528$.

306. Вычислите, применяя законы умножения:

а) $24 \cdot 2 \cdot 5$;

б) $47 \cdot 4 \cdot 25$;

в) $53 \cdot 8 \cdot 125$;

г) $2 \cdot 37 \cdot 5$;

д) $25 \cdot 57 \cdot 4$;

е) $8 \cdot 39 \cdot 125$.

307. Вычислите: а) 12^2 ; б) 9^3 ; в) 4^4 ; г) 2^5 .

308. Определите знак произведения. Выполните умножение:

а) $(-2) \cdot (+3)$;

б) $(+8) \cdot (-3)$;

в) $(+6) \cdot (-5)$;

г) $(-7) \cdot (+4)$;

д) $(-2) \cdot (-1)$;

е) $(-8) \cdot (-8)$;

ж) $(-7) \cdot (-9)$;

з) $(+9) \cdot (+8)$;

и) $(+10) \cdot (+77)$.

309. Выполните умножение:

а) $0 \cdot (-5)$;

б) $(+3) \cdot 0$;

в) $(-6) \cdot 0$;

г) $(+49) \cdot 0$;

д) $0 \cdot (-54)$;

е) $0 \cdot (+48)$.

310. Выполните умножение по образцу:

$$(-56) \cdot (-13) = + (56 \cdot 13) = \dots$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 13 \\ \hline \dots \end{array}$$

а) $(+45) \cdot (-13)$;

б) $(+230) \cdot (-48)$;

в) $(-505) \cdot (-8)$;

г) $(-358) \cdot (-5)$;

д) $(-24) \cdot (-35)$;

е) $(-125) \cdot (-160)$;

ж) $(-405) \cdot (+28)$;

з) $(-72) \cdot (+101)$;

и) $(+15) \cdot (+16)$.

Замечание. Для упрощения записи у положительных множителей знак «+» и скобки можно опускать, но этот знак надо учитывать, определяя знак произведения.

Например, $(-3) \cdot (+17) = (-3) \cdot 17 = -51$, $(+2) \cdot (-48) = 2 \cdot (-48) = -96$.

311. Упростите запись произведения в предыдущем задании.

312. Определите знак произведения:

а) $(-1) \cdot (-1)$;

б) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;

в) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$;

г) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$.

313. Определите знак произведения и вычислите это произведение:
а) $(-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 4$; б) $(-2) \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (-6)$.

314. Сколько отрицательных множителей может содержать произведение, чтобы оно было:
а) положительным; б) отрицательным?

315. Используя законы умножения, вычислите по образцу:

$$\begin{aligned}(-16) \cdot (-7) \cdot (-25) &= -(16 \cdot 25 \cdot 7) = -(4 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 7) = \\ &= -(100 \cdot 4 \cdot 7) = -(100 \cdot 28) = -2800.\end{aligned}$$

а) $2 \cdot (-3) \cdot (-10)$; б) $(-4) \cdot 17 \cdot 25$; в) $8 \cdot (-25) \cdot (-3)$;
г) $(-6) \cdot (-5) \cdot (-7)$; д) $8 \cdot (-17) \cdot 125$; е) $(-3) \cdot 16 \cdot (-125)$.

316. Если a и b — целые числа, то верно ли, что:

- а) если $a > 0$ и $b > 0$, то $a \cdot b > 0$;
б) если $a < 0$ и $b < 0$, то $a \cdot b < 0$;
в) если $a \cdot b > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$;
г) если $a \cdot b < 0$, то $a > 0$ и $b < 0$?

317. Произведение трёх чисел положительно. Можно ли утверждать, что все три числа положительные? Приведите примеры.

318. Произведение двух чисел равно нулю. Докажите, что среди этих чисел есть хотя бы один ноль.

319. Вычислите:

- а) $(-1)^2$; б) $(-1)^3$; в) $(-1)^4$; г) $(-1)^5$;
д) $(-3)^2$; е) $(-2)^2$; ж) $(-4)^2$; з) $(-5)^2$;
и) $(-2)^3$; к) $(-3)^3$; л) $(-4)^3$; м) $(-5)^3$.

320. Определите знак степени:

- а) $(-1)^2$; б) $(-1)^5$; в) $(-1)^6$; г) $(-1)^{11}$;
д) $(-1)^8$; е) $(-1)^9$; ж) $(-1)^{10}$; з) $(-24)^5$;
и) $(-33)^{50}$; к) $(-103)^{46}$; л) $(-12)^{100}$; м) $(-41)^{33}$.

321. Вычислите:

- а) $(-1)^{11} - (-1)^{11}$; б) $(-2)^5 - (-3)^3$;
в) $(-1)^4 - (-1)^2 - (-1)^2$; г) $(-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4$.

322. Убедитесь, что верно равенство: $72 - 4 \cdot (-3) = 72 + (-4) \cdot (-3)$.

323. Вычислите:

- а) $48 - 12 \cdot (-5)$; б) $69 - (-12) \cdot (-5)$; в) $129 - 15 \cdot 9$;
г) $456 - 45 \cdot (-6)$; д) $158 - 45 \cdot 7$; е) $258 - 13 \cdot (-7)$.

324. Какое число больше:

- а) $3 \cdot 3 \cdot 3$ или $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$;
б) $-5 \cdot 5$ или $(-5) \cdot (-5)$;
в) $(-7) \cdot (-7)$ или $7 \cdot (-7)$;
г) $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ или $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$?

325. Запишите выражение разными способами по образцу:

$$\text{а) } (-8)^3 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) = -(8 \cdot 8 \cdot 8) = -(8^3) = -8^3;$$

$$\text{б) } -6^3; \quad \text{в) } (-5)^4; \quad \text{г) } -5^4; \quad \text{д) } -7^2; \quad \text{е) } (-18)^2.$$

326. Какое число больше:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } -2^2 \text{ или } (-2)^2; & \text{б) } -3^2 \text{ или } -2^3; \\ \text{в) } (-3)^2 \text{ или } (-2)^3; & \text{г) } (-4)^3 \text{ или } -3^4? \end{array}$$

327. Запишите:

$$\begin{array}{ll} \text{а) квадрат числа } -2; & \text{б) произведение } -4 \text{ и } 7; \\ \text{в) сумму чисел } -7 \text{ и } 7; & \text{г) куб числа } -10; \\ \text{д) четвёртую степень } -5; & \text{е) разность чисел } -4 \text{ и } -12. \end{array}$$

328. Вычислите, предварительно указав порядок действий:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 3 \cdot (-2)^2; & \text{б) } -4 \cdot (-3)^3; & \text{в) } -(-3)^4; \\ \text{г) } -(-2)^3; & \text{д) } -(-5)^2; & \text{е) } -4 \cdot (-3)^2. \end{array}$$

329. Найдите число одинаковых слагаемых:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } (-2) + (-2) + \dots + (-2) = -12; & \text{б) } (-8) + (-8) + \dots + (-8) = -80; \\ \text{в) } (-4) + (-4) + \dots + (-4) = -20; & \text{г) } (-3) + (-3) + \dots + (-3) = -39. \end{array}$$

330. Какие одинаковые слагаемые сложили:

$$\text{а) } \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} = -25;$$

$$\text{б) } \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} = -40;$$

$$\text{в) } \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} = -36?$$

2.8. Частное целых чисел

Пусть a и b — целые числа, не равные нулю, такие, что $|a|$ делится нацело на $|b|$, тогда

частное чисел a и b равно частному их модулей, взятому со знаком «+», если эти числа одинаковых знаков, и со знаком «-», если они разных знаков.

$$\begin{aligned} \text{Например, } (-20) : (-5) &= +(20 : 5) = 4, \\ 40 : 5 &= 8, \\ 8 : (-2) &= -(8 : 2) = -4, \\ (-12) : 3 &= -(12 : 3) = -4. \end{aligned}$$

Частное от деления нуля на любое целое, не равное нулю число a равно нулю:

$$0 : a = 0.$$

Например, $0 : (-5) = 0$, $0 : 3 = 0$.

Делить на 0 нельзя.

Замечание. Так же как и для натуральных чисел, деление на цело целых, отличных от нуля чисел не всегда возможно, т. е. не всегда найдётся целое число, которое при умножении на делитель даст делимое. В главе 3 будут рассмотрены новые — рациональные числа, и тогда частное любых целых, отличных от нуля чисел будет рациональным числом.

331. Чему равно частное от деления отличных от нуля целого числа a на целое число b , если $|a|$ делится нацело на $|b|$?

332. Чему равно частное от деления нуля на любое целое, не равное нулю число?

333. Можно ли делить на нуль?

334. Выполните действия:

- а) $234 : 6$; б) $744 : 8$; в) $1794 : 23$;
г) $2997 : 37$; д) $9268 : 331$; е) $21\,333 : 547$.

335. Вычислите:

- а) $576 \cdot 23 - 766 \cdot 35$; б) $849 \cdot 18 - 783 \cdot 28$;
в) $136 \cdot 13 - (8416 + 1234)$; г) $4736 : 4 - 1245 \cdot 5$.

336. Определите знак числа x :

- а) $x \cdot (-8) = 400$; б) $(-10) \cdot x = -420$;
в) $x \cdot 15 = -60$; г) $12 \cdot x = 144$.

337. Определите знак частного:

- а) $400 : (-8)$; б) $(-420) : (-10)$;
в) $(-60) : 15$; г) $144 : 12$.

Выполните деление (**338—339**):

338. а) $(+60) : (-10) = - (60 : 10) = -6$;

- б) $(-20) : 5$; в) $(-50) : 10$; г) $(-80) : (-20)$;
д) $(-100) : (-25)$; е) $30 : (-15)$; ж) $64 : (-8)$.

339. а) $200 : (-40)$; б) $(-500) : 100$; в) $720 : (-90)$;
г) $(-810) : (-9)$; д) $(-560) : (-70)$; е) $(-480) : 60$.

340. Выполните деление по образцу:

$$7227 : (-9) = - (7227 : 9) = - \dots \quad \left| \quad \begin{array}{r} 7227 \ 9 \\ \underline{} \\ \dots \end{array} \right.$$

- а) $(-711) : 9$; б) $1332 : (-3)$; в) $(-2316) : (-12)$;
г) $(-1302) : 42$; д) $(-2205) : (-7)$; е) $3208 : (-8)$.

341. Найдите число x , для которого верно равенство:

- а) $x \cdot (-12) = 36$; б) $(-13) \cdot x = -143$; в) $x \cdot (-15) = 465$;
г) $14 \cdot x = -294$; д) $x : 8 = 7$; е) $x : 6 = -42$;
ж) $x : (-7) = -9$; з) $x : (-11) = -352$; и) $48 : x = 6$;
к) $56 : x = -8$; л) $(-64) : x = 8$; м) $(-68) : x = -4$.

342. Выполните действия по образцу:

а) $13 \cdot 15 - 28 \cdot 25 = -505$;

$$\begin{array}{r} 1) \times \begin{array}{r} 13 \\ 15 \\ \hline 65 \\ + 13 \\ \hline 195 \end{array} \quad 2) \times \begin{array}{r} 28 \\ 25 \\ \hline 140 \\ + 56 \\ \hline 700 \end{array} \quad 3) 195 - 700 = -505 \quad \left| \quad \begin{array}{r} 700 \\ -195 \\ \hline 505 \end{array} \right. \end{array}$$

- б) $679 \cdot 13 - 846 \cdot 15$; в) $849 \cdot 18 - 684 : 19$;
г) $4074 : 42 - 12 \cdot 59$; д) $3612 : 12 - 8445 : 15$.

***343.** Вычислите:

- а) $43\,212 : 78 - 407 \cdot 720 + 350 \cdot 509$;
б) $164 \cdot 756 + 148\,916 - 564 \cdot 702 + 48\,762 : 86$;
в) $(24\,968 + 11\,648) : (768 - 1564)$;
г) $37\,115 : 65 - 72\,675 : 85$.

2.9. Распределительный закон

Для любых целых чисел a , b , c выполняется **распределительный закон**:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Доказательство его сводится к распределительному закону для неотрицательных чисел. Докажем, например, равенство:

$$((-3) + (-2)) \cdot (-7) = (-3) \cdot (-7) + (-2) \cdot (-7).$$

$$\begin{aligned} \text{Действительно, } & ((-3) + (-2)) \cdot (-7) = -(3+2) \cdot (-7) = (3+2) \cdot 7 = \\ & = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = (-3) \cdot (-7) + (-2) \cdot (-7). \end{aligned}$$

Распределительный закон верен и для нескольких слагаемых. Например,

$$(3 + 5 + (-7)) \cdot (-2) = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-2) + (-7) \cdot (-2).$$

Переход от суммы $a \cdot c + b \cdot c$ к произведению $(a + b) \cdot c$ называют вынесением общего множителя за скобки.

Пример 1. Вынесем общий множитель за скобки:

$$3 \cdot 35 + 3 \cdot (-65).$$

Решение. $3 \cdot 35 + 3 \cdot (-65) = 3 \cdot (35 + (-65)) = 3 \cdot (35 - 65).$

Пример 2. Вычислим: $(-49) \cdot (-96) + 86 \cdot (-49).$

Решение. Заметим, что каждое слагаемое суммы имеет множитель (-49) . Вынесем его за скобки:

$$(-49) \cdot (-96) + 86 \cdot (-49) = (-49) \cdot ((-96) + 86) = (-49) \cdot (-10) = 490.$$

Этот пример показывает, что вынесение общего множителя за скобки в некоторых случаях позволяет избежать громоздких вычислений.

344. Запишите произведение в виде суммы (разности):

$$а) 5 \cdot (38 + 17) = 5 \cdot 38 + 5 \cdot 17;$$

$$б) 17 \cdot (31 + 16); \quad в) (28 + 37) \cdot 56; \quad г) (72 + 98) \cdot 12;$$

$$д) (49 - 17) \cdot 12; \quad е) 8 \cdot (57 - 38); \quad ж) 17 \cdot (28 + 31).$$

345. Вынесите общий множитель за скобки:

$$а) 15 \cdot 12 + 15 \cdot 49 = 15 \cdot (12 + 49);$$

$$б) 57 \cdot 39 + 57 \cdot 64; \quad в) 39 \cdot 12 + 28 \cdot 12; \quad г) 73 \cdot 57 + 79 \cdot 57;$$

$$д) 13 \cdot 95 - 13 \cdot 41; \quad е) 27 \cdot 48 - 19 \cdot 48; \quad ж) 54 \cdot 88 - 54 \cdot 87.$$

346. Вычислите удобным способом:

$$а) 350 \cdot 46 + 250 \cdot 46; \quad б) 728 \cdot 49 - 528 \cdot 49;$$

$$в) 52 \cdot 100 - 52 \cdot 99; \quad г) 99 \cdot 48 + 1 \cdot 48;$$

$$д) 4300 - 43 \cdot 99; \quad е) 999 \cdot 156 + 156;$$

$$ж) 128 \cdot 32 + 872 \cdot 32 - 1000 \cdot 31; \quad з) 999 \cdot 999 - 999 \cdot 989 - 9990;$$

$$и) 728 \cdot 359 - 628 \cdot 359 + 641 \cdot 1000.$$

347. Запишите распределительный закон для целых чисел a , b , c , сформулируйте его.

348. Как называют переход от суммы $a \cdot c + b \cdot c$ к произведению $(a + b) \cdot c$?

349. Проверьте выполнение распределительного закона для чисел a , b , c :

$$а) a = -5, b = 3, c = -10; \quad б) a = -5, b = -3, c = 6.$$

350. Запишите произведение в виде суммы по образцу:

а) $(-5) \cdot (-12 + 16) = (-5) \cdot (-12) + (-5) \cdot 16$;

б) $6 \cdot (8 + (-17))$;

в) $(-7) \cdot ((-15) + (-12))$;

г) $16 \cdot (8 - 17)$;

д) $(-17) \cdot (-15 - 12)$;

е) $(25 + 16) \cdot (-9)$;

ж) $(45 - 17) \cdot (-11)$;

з) $(-15 - 42) \cdot 13$;

и) $(-28 - 37) \cdot (-3)$.

351. Верно ли применён распределительный закон:

а) $(-2) \cdot (5 + 7) = -10 - 14$;

б) $(-7 + 5 - 8) \cdot (-2) = 14 - 10 + 16$;

в) $(7 - 8) \cdot (-3) = -21 - 24$;

г) $6 \cdot ((-4) + (-12)) = -24 - 72$?

352. Вместо знака \square поставьте знак «+» или «-» так, чтобы равенство было верным:

а) $3 \cdot (2 - 7) = \square 3 \cdot 2 \square 3 \cdot 7$;

б) $(-5) \cdot (-6 - 7) = \square 5 \cdot 6 \square 5 \cdot 7$;

в) $(-2) \cdot (6 + 9) = \square 2 \cdot 6 \square 2 \cdot 9$;

г) $(-2) \cdot (6 - 9) = \square 2 \cdot 6 \square 2 \cdot 9$.

Упростите числовое выражение (**353–355**):

353. а) $(-8) \cdot (-7 + 5) - 5 \cdot (-8)$;

б) $3 \cdot (-98 + 2) + 3 \cdot 98$;

в) $(-8) \cdot (-47 + 125) - 47 \cdot 8$;

г) $(-25) \cdot (45 - 100) + 25 \cdot 45$;

д) $83 \cdot (-98 - 1) + 98 \cdot 83$;

е) $(-15) \cdot (-7 + 15) - 7 \cdot 15$.

354. а) $(12 - 27) \cdot (-1)$;

б) $(-1) \cdot (35 - 88)$;

в) $(-1) \cdot (56 - 74)$;

г) $(-1) \cdot (-28 - 112)$.

355. а) $4 \cdot (-25 + 76 + 24)$;

б) $(25 - 62 - 38) \cdot (-4)$;

в) $(7 - 125 + 13) \cdot (-8)$;

г) $8 \cdot (-8 + 100 - 22 + 25)$.

356. Вынесите общий множитель за скобки по образцу:

а) $45 \cdot 13 - 45 \cdot 81 = 45 \cdot (13 - 81)$;

б) $49 \cdot 57 - 49 \cdot 570$;

в) $58 \cdot 64 - 99 \cdot 64$;

г) $(-53) \cdot 48 - (-53) \cdot 59$;

д) $(-45) \cdot 12 + 95 \cdot (-45)$;

е) $-53 \cdot 48 - 57 \cdot 48$;

ж) $-45 \cdot 13 - 45 \cdot 27$.

357. Вынесите общий множитель за скобки со знаком «+»:

а) $4 \cdot 52 - 4 \cdot (-95) = 4 \cdot (52 - (-95)) = 4 \cdot (52 + 95)$;

б) $-16 \cdot 17 - 16 \cdot 18$;

в) $49 \cdot 19 - 19 \cdot 91$;

г) $-88 \cdot 35 - 77 \cdot 35$;

д) $73 \cdot 37 - 73 \cdot 73$;

е) $-57 \cdot 33 + 48 \cdot 33$;

ж) $99 \cdot 98 + 99 \cdot 100$.

358. Вынесите общий множитель за скобки со знаком «-»:

а) $4 \cdot 52 - 4 \cdot (-95) = (-4) \cdot (-52 - 95)$;

б) $-16 \cdot 17 - 16 \cdot 18$;

в) $49 \cdot 19 - 19 \cdot 91$;

г) $-88 \cdot 35 - 77 \cdot 35$;

д) $73 \cdot 37 - 73 \cdot 73$;

е) $-57 \cdot 33 + 48 \cdot 33$;

ж) $99 \cdot 98 + 99 \cdot 100$.

- 359.** Вычислите:
- а) $59 \cdot 64 + 59 \cdot 36$; б) $72 \cdot 128 - 72 \cdot 228$;
в) $63 \cdot 356 - 556 \cdot 63$; г) $-99 \cdot 12 - 99 \cdot 88$;
д) $-67 \cdot 85 - 67 \cdot 115$; е) $41 \cdot 91 - 91 \cdot 51$.

- *360.** Покажите, что:
- а) $43 \cdot 15 - 55 \cdot 15 + 34 \cdot 15$ делится на 22;
б) $12 \cdot 17 - 16 \cdot 17 + 13 \cdot 17$ делится на 9;
в) $99 \cdot 51 - 99 \cdot 91 + 69 \cdot 99$ делится на 29;
г) $63 \cdot 23 - 32 \cdot 63 + 22 \cdot 63$ делится на 13.

- *361.** Вычислите:
- а) $42 \cdot 53 - 32 \cdot 53 - 42 \cdot 63 + 32 \cdot 63$;
б) $79 \cdot 45 + 79 \cdot 55 - 89 \cdot 45 - 89 \cdot 55$;
в) $88 \cdot 75 - 12 \cdot 45 + 12 \cdot 75 - 88 \cdot 45$;
г) $392 \cdot 23 - 492 \cdot 23 + 392 \cdot 77 - 492 \cdot 77$.

2.10. Раскрытие скобок и заключение в скобки

Такое выражение, как $-3 + 6 - 1$, часто называют суммой, потому что его можно записать в виде суммы $(-3) + (+6) + (-1)$.

Мы знаем, что $+5 = 5$,

$$+(-5) = -5,$$

$$+(3+5) = 3+5,$$

$$+(5-2) = 5-2,$$

$$+(-3+6-1) = -3+6-1.$$

Эти же результаты можно получить, используя равенство:

$$+a = (+1) \cdot a.$$

Например,

$$\begin{aligned} +(-3+6-1) &= (+1) \cdot (-3+6-1) = \\ &= (+1) \cdot (-3) + (+1) \cdot 6 + (+1) \cdot (-1) = -3+6-1. \end{aligned}$$

Таким образом, верно равенство: $+(-3+6-1) = -3+6-1$.

Говорят, что в левой части этого равенства слагаемые заключены в скобки, а в правой — скобки раскрыты.

Если сумма заключена в скобки, перед которыми стоит знак «+», то при раскрытии скобок знаки слагаемых оставляют без изменения.

Например, $+(-7+3-4) = -7+3-4$.

Если сумма заключается в скобки, перед которыми стоит знак «+», то знаки слагаемых, заключаемых в скобки, оставляют без изменения.

Например, $-3 + 8 - 7 = +(-3 + 8 - 7)$.

Напомним, что верно равенство:

$$-a = (-1) \cdot a.$$

Например, $-5 = (-1) \cdot 5$, $-(-2) = (-1) \cdot (-2) = 2$.

Используя распределительный закон и равенство $-a = (-1) \cdot a$, можно раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «-».

Например,

$$\begin{aligned} -(2 - 5) &= (-1) \cdot (2 - 5) = (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-5) = -2 + 5; \\ -(6 - 4) &= (-1) \cdot (6 - 4) = (-1) \cdot 6 - (-1) \cdot 4 = -6 + 4. \end{aligned}$$

Если сумма заключена в скобки, перед которыми стоит знак «-», то при раскрытии скобок знаки слагаемых меняют на противоположные.

Например, $-(-8 + 3 - 11) = +8 - 3 + 11$.

Если сумма заключается в скобки, перед которыми стоит знак «-», то знаки слагаемых, заключаемых в скобки, меняют на противоположные.

Например, $9 - 17 + 18 - 4 = -(-9 + 17 - 18 + 4)$.

362. Сформулируйте правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак: а) «+»; б) «-».

363. По какому правилу заключают в скобки сумму, если перед скобками ставят знак: а) «+»; б) «-»?

Раскройте скобки, объясняя свои действия (**364–366**):

364. а) $+(5+7)$; б) $+(3-8+7)$;
в) $+(-3+8+7)$; г) $+(-10-12+1)$.

365. а) $-(5+7)$; б) $-(3-8+7)$;
в) $-(-3+8+7)$; г) $-(-10-12+1)$.

366. а) $+(a-b-c)$; б) $-(a-b-c)$;
в) $+(-a+b+c)$; г) $-(-a+b+c)$,

где a , b и c — целые числа.

Раскройте скобки (367–370):

367. а) $+(56+42)$; б) $+(7 \cdot 8+42)$; в) $+(63+42)$;
г) $+(63+6 \cdot 7)$; д) $+(61-98)$; е) $+(-88+99)$.

368. а) $-(41+19)$; б) $-(44+57)$; в) $-(45-35)$;
г) $-(45-7 \cdot 5)$; д) $-(45-53)$; е) $-(9 \cdot 5-53)$.

369. а) $+(48-93)-8$; б) $-(96-35)-6$;
в) $-(7 \cdot 8-20)+7 \cdot 8$; г) $+(99-5+8)-17$.

370. а) $-(2 \cdot 5+48)+23$; б) $-(32-74)-74$;
в) $+(-120-9 \cdot 9)-81$; г) $+(120-9^2)+81$.

371. Раскройте скобки и вычислите сумму:

а) $-(-72+39)+39=72-39+39=72$;

б) $+(398-700)+700$; в) $-(754-1200)-1200$;
г) $+(-32-491)+32$; д) $-(-129+59)-129$.

Замечание. Знак «+» перед скобками часто не пишут, но учитывают его при раскрытии скобок.

Вычислите (372–373):

372. а) $(456-75)-25$; б) $-(728-49)+51$;
в) $(-238+742)-42$; г) $-(-356+145)-56$.

373. а) $(7 \cdot 95-900)-7 \cdot 95$; б) $-(795-9 \cdot 99)-99 \cdot 9$;
в) $(-48+101-29)-101+29$; г) $-(-79-39+81)+81-39$.

374. Перепишите, заполняя пропуски:

а) $45-36=+(45-36)$;

б) $45-36=-(\dots)$; в) $-79+11=+(\dots)$;
г) $-79+11=-(\dots)$; д) $38+59=+(\dots)$;
е) $-17-81=-(\dots)$; ж) $39-70=+(\dots)$.

375. Заключите первые два слагаемых в скобки, перед скобками поставьте знак «+»:

а) $79-48+15-8$; б) $-56+38-12+100$;
в) $43+59-35-11$; г) $-43-59+35+11$;
д) $42-79+13-1$; е) $-57+48-17+23$.

376. Заключите первые два слагаемых в скобки, перед скобками поставьте знак «-»:

а) $79-48+15-8$; б) $-56+38-12+100$;
в) $43+59-35-11$; г) $-43-59+35+11$;
д) $42-79+13-1$; е) $-57+48-17+23$.

2.11. Действия с суммами нескольких слагаемых

В предыдущем пункте были приведены правила, по которым можно раскрывать скобки, перед которыми стоит знак «+» или «-». Но встречаются суммы, в которых стоящие перед скобками знаки «+» и «-» обозначают действия сложения и вычитания. Оказывается, что и в этом случае применимы изученные правила:

$$a + (b - c) = a + b - c, \quad a - (b - c) = a - b + c,$$

где a , b и c — целые числа.

В самом деле,

$$\begin{aligned} a + (b - c) &= a + (b + (-c)) = a + b + (-c) = a + b - c, \\ a - (b - c) &= a + (- (b - c)) = a + (-b + c) = a - b + c. \end{aligned}$$

Например, $9 + (8 - 3) = 9 + 8 - 3$,

$$9 - (7 - 3) = 9 - 7 + 3.$$

При вычислении суммы нескольких слагаемых используют правила раскрытия скобок, заключения в скобки и законы сложения. Иногда складывают сначала положительные, потом отрицательные слагаемые и находят сумму полученных чисел, применяя правило сложения чисел с разными знаками.

Например,

$$\begin{aligned} 78 - 89 + 32 - 11 &= (78 + 32) + (-89 - 11) = \\ &= 110 + (-100) = 110 - 100 = 10. \end{aligned}$$

Но можно вычислять иначе:

$$78 - 89 + 32 - 11 = (78 - 89) + (32 - 11) = (-11) + 21 = 10.$$

377. По каким правилам раскрывают скобки в суммах?

378. Какие правила и законы применяют для вычисления суммы нескольких слагаемых?

379. Раскройте скобки:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| а) $49 - (38 - 5)$; | б) $-32 + (78 - 9)$; |
| в) $72 + (-32 + 9)$; | г) $-63 - (-63 + 1)$; |
| д) $(79 - 39) - (79 - 48)$; | е) $(37 - 49) - (87 - 59)$; |
| ж) $-(45 - 64) + (38 - 24)$; | з) $-(-35 + 2) + (-35 - 8)$. |

380. Раскройте скобки и вычислите:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| а) $108 - (108 - 5)$; | б) $-49 - (-49 + 2)$; |
| в) $-56 + (-98 + 56)$; | г) $100 - (-5 + 100)$; |
| д) $(79 - 81) - (39 - 81)$; | е) $(-78 + 23) + (27 + 78)$; |
| ж) $(-39 + 15) - (5 - 39)$; | з) $(105 - 48) - (62 + 105)$. |

- 381.** Вычислите, раскрывая скобки только в тех случаях, когда это облегчает вычисления:
- а) $79 - (63 + 7)$; б) $43 + (23 + 77)$; в) $79 - (79 - 7)$;
 г) $43 + (77 - 43)$; д) $102 - (56 + 44)$; е) $102 - (102 - 5)$;
 ж) $93 - (68 + 93)$; з) $-72 - (99 + 1)$; и) $48 - (11 + 19)$;
 к) $48 - (18 + 19)$; л) $-56 + (96 + 9)$; м) $59 + (96 + 4)$;
 н) $52 - (32 - 41)$; о) $73 - (68 - 8)$; п) $-25 - (-45 + 19)$.
- 382.** Заключите два последних слагаемых в скобки двумя способами (со знаком «+» и со знаком «-» перед скобками):
- а) $37 + 12 + 13$; б) $45 - 2 - 12$; в) $5 - 28 + 22$; г) $76 + 38 - 52$.
- 383.** Вычислите двумя способами (применяя и не применяя правила раскрытия скобок или заключения в скобки):
- а) $48 - 19 - 1$; б) $93 - 7 - 13$; в) $48 - (28 - 43)$; г) $88 - (18 - 30)$.
- 384.** Вычислите, выбирая удобный способ:
- а) $84 - (44 + 28)$; б) $94 - (44 + 26)$; в) $826 - (231 + 269)$;
 г) $728 - (328 - 179)$; д) $83 - 23 - 29$; е) $83 - 21 - 29$;
 ж) $236 - 136 - 92$; з) $236 - 108 - 92$.
- 385.** Вычислите:
- а) $-(98 + 49) - (102 - 49)$; б) $(123 - 254) - (23 - 354)$;
 в) $(149 + 237) - (137 + 49)$; г) $-(95 + 105) - (398 - 98)$;
 д) $(49 + 35) - (49 - 35)$; е) $(48 + 15) - (48 - 15)$;
 ж) $(76 + 28) - (76 - 28)$; з) $(72 + 29) - (72 - 29)$.

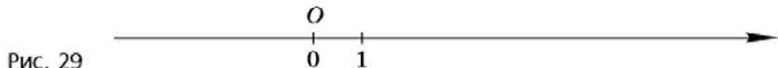
2.12. Представление целых чисел на координатной оси

Зададим прямую, на которой определим (стрелкой) направление, называемое **положительным**; отметим точку O , соответствующую числу 0, её называют **начальной точкой** или **началом отсчёта**. Зададим **единичный отрезок**.

Прямую, на которой заданы начало отсчёта, направление отсчёта и единичный отрезок, называют **координатной осью**.

Обычно координатную ось изображают в виде горизонтальной прямой, положительное направление выбирают вправо.

Координатная ось делится точкой O на два луча. Один из них положительный, на рисунке 29 идущий от нуля вправо, его назы-

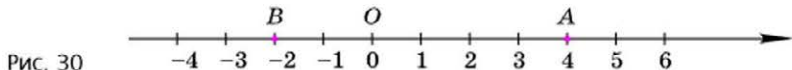


вают положительной координатной полуосью или положительным координатным лучом. Другой — отрицательный, на рисунке 29 идущий от нуля влево, его называют отрицательной координатной полуосью или отрицательным координатным лучом.

С помощью координатной оси целые числа изображаются точками. Точку O , изображающую число нуль, называют ещё точкой нуль или точкой с координатой нуль и пишут $O(0)$.

Произвольное целое число n ($n \neq 0$) изображают точкой, расстояние которой от точки нуль равно модулю этого числа: $|n|$. Она находится на положительной полуоси, если число n больше нуля ($n > 0$), и на отрицательной полуоси, если число n меньше нуля ($n < 0$). Эту точку называют точкой n или точкой с координатой n , а число n — координатой этой точки.

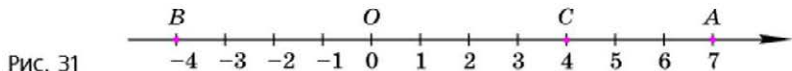
Например, на рисунке 30 отмечена точка A с координатой 4, пишут: $A(4)$ — и точка B с координатой -2 , пишут: $B(-2)$.



Если m и n — целые числа и $m > n$, то:

- 1) точка m расположена правее точки n на координатной оси;
- 2) расстояние между точками m и n равно $m - n$.

Например, на координатной оси (рис. 31) отмечены точки $A(7)$ и $B(-4)$, так как $7 > -4$, то точка A правее точки B и $AB = 7 - (-4) = 7 + 4 = 11$, $BO = 0 - (-4) = 0 + 4 = 4$.



Две точки, координаты которых противоположные числа, находятся на одинаковом расстоянии от точки нуль, но на разных полуосях (например, точки B и C на рисунке 31).

386.

Что называют:

- а) координатной осью;
- б) положительной координатной полуосью;
- в) отрицательной координатной полуосью?

387.

Как называют точку, изображающую число нуль?

388.

Как найти расстояние между точками m и n координатной оси ($m > n$)?

389.

Какие точки находятся на одинаковом расстоянии от точки нуль, но на разных полуосях?

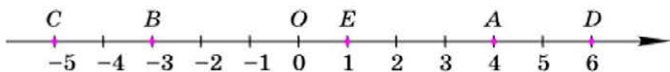


Рис. 32

- 390.** Дана координатная ось (рис. 32), некоторые её точки обозначены буквами A, B, C, D, E . Укажите координаты этих точек.
- 391.** Вычислите длину отрезка (рис. 32):
 а) OA ; б) OB ; в) OC ; г) OD ; д) AC ;
 е) AE ; ж) OE ; з) CB ; и) DA ; к) BE .
- 392.** Изобразите координатную ось (единичный отрезок 1 см). Отметьте на ней точки $A(-5), B(7), C(4), D(-4)$. Вычислите длину отрезка:
 а) OA ; б) OB ; в) BC ; г) BD ; д) AD .
 Результаты проверьте с помощью линейки.
- 393.** Изобразите координатную ось (единичный отрезок 1 клетка тетради). Отметьте на ней точки $O(0), A(5), B(-8), C(9), D(-2)$. Вычислите длину отрезка:
 а) OA ; б) OB ; в) AB ; г) AC ; д) DC .
- 394.** Определите расстояние между точками m и n координатной оси, если:
 а) $m=7, n=-3$; б) $m=3, n=-7$;
 в) $m=-8, n=0$; г) $m=-8, n=8$.
- 395.** На координатной оси отмечены точки 0 и 3. С помощью циркуля покажите на оси точки $-3, 6, -6, 9, -9$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1 ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ, СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Изображая числа 1 и -1 на координатной оси, нужно отметить на этой оси две точки, удалённые от начала отсчёта на одинаковое расстояние (рис. 33). Про эти точки говорят, что они симметричны относительно точки O .

Вообще точки A и B называют симметричными относительно точки O , если эти три точки лежат на одной прямой и точка O

Рис. 33



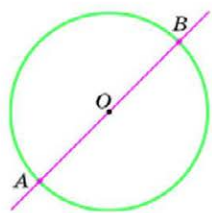


Рис. 34

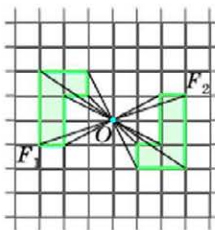


Рис. 35

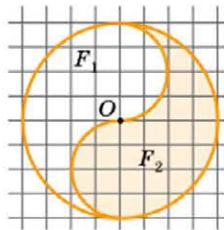


Рис. 36

делит отрезок AB на две равные части. На рисунке 34 окружность с центром O пересекает прямую в точках A и B . Отрезки AO и OB равны, поэтому точки A и B симметричны относительно точки O .

Заметим, что если точку A повернуть на 180° вокруг точки O (по окружности), то она совместится с точкой B .

Пусть даны две фигуры F_1 и F_2 и точка O . Если при повороте вокруг точки O на 180° одна из фигур совмещается с другой, то такие фигуры называют симметричными относительно точки O .

На рисунке 35 показаны фигуры F_1 и F_2 и точка O . Если одну из этих фигур повернуть на 180° , то она совместится с другой фигурой (т. е. фигуры совпадут при наложении их друг на друга). Эти фигуры симметричны относительно точки O . Фигуры F_1 и F_2 равны, пишут: $F_1 = F_2$. Фигуры F_1 и F_2 , изображённые на рисунке 36, тоже симметричны относительно точки O , они равны: $F_1 = F_2$.

Любые фигуры, симметричные относительно точки, равны.

Задача 1. Дан отрезок AB и точка O , не принадлежащая ему (рис. 37). Построим отрезок A_1B_1 , симметричный отрезку AB относительно точки O .

Требуется построить отрезок A_1B_1 так, чтобы точка A_1 была симметрична точке A , а точка B_1 — точке B относительно точки O . При этом центр симметрии O будет серединой каждого из отрезков AA_1 и BB_1 . Проведём из точки A через центр симметрии O луч AO , на котором с помощью циркуля отложим отрезок OA_1 , равный отрезку OA . Так получим точку A_1 , симметричную точке A

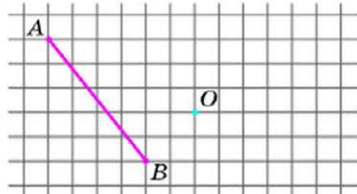


Рис. 37

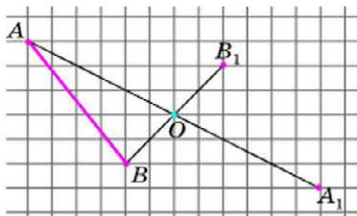


Рис. 38

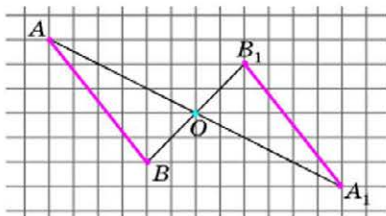


Рис. 39

относительно точки O . Аналогично построим точку B_1 , симметричную точке B относительно точки O (рис. 38).

Соединив точки A_1 и B_1 , получим отрезок A_1B_1 , симметричный отрезку AB относительно точки O (рис. 39).

Задача 2. Дан треугольник ABC и точка O вне этого треугольника (рис. 40). Построим треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно точки O .

Требуется построить треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы точки A_1 , B_1 и C_1 были симметричны соответственно точкам A , B и C относительно центра симметрии O . Сначала построим точки A_1 , B_1 и C_1 . Потом, соединив точки A_1 , B_1 и C_1 , получим треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно точки O (рис. 41).

Задача 3. На клетчатой бумаге изображён квадрат 4×4 клеток (рис. 42, а). Сколько существует способов разрезания этого квадрата на две равные части так, чтобы линия разреза шла по линейкам клетчатой бумаги? (Способы считаются различными, если многоугольники, получаемые при одном способе, не равны многоугольникам, получаемым при другом способе.)

Следовательно, требуется определить, сколько существует различных многоугольников, на которые можно разрезать квадрат согласно условиям задачи.

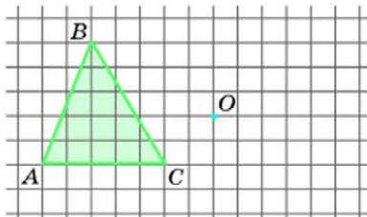


Рис. 40

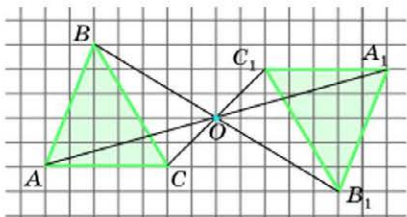


Рис. 41

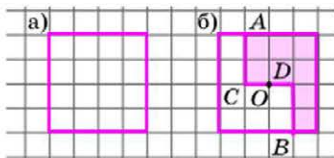


Рис. 42

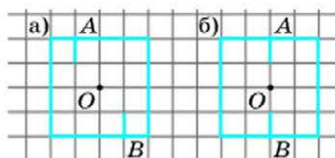


Рис. 43

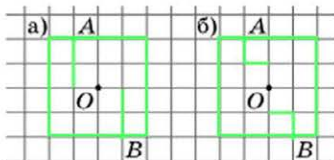


Рис. 44

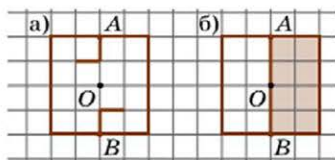


Рис. 45

На рисунке 42, б показано одно из решений задачи. Ломаная $ACDB$ делит квадрат на два многоугольника, которые симметричны относительно точки O и равны, так как их можно совместить. Точки A и B также симметричны относительно точки O . При повороте на 180° вокруг центра O одна часть ломаной ACO совместится с другой частью BDO . Говорят, что ломаная $ACDB$ симметрична самой себе относительно точки O .

Для поиска всех решений задачи надо построить все ломаные, симметричные самим себе относительно точки O . Для этого рассмотрим все возможные пары точек, лежащих на сторонах квадрата и на линиях клетчатой бумаги, симметричных относительно центра квадрата. Начнём с точек A и B , изображённых на рисунках 43, а и 43, б. На каждом из них показано начало (A) и конец (B) искомой ломаной. В каждом из этих случаев имеется только две возможности продолжить рисование ломаной. Сделаем копии для рисунков 43, а и 43, б и продолжим рисование ломаной так, как показано на рисунках 44 и 45.

К одному решению, которое уже получено (см. рис. 45, б), добавятся ещё пять решений (рис. 46). Легко видеть, что, взяв другие

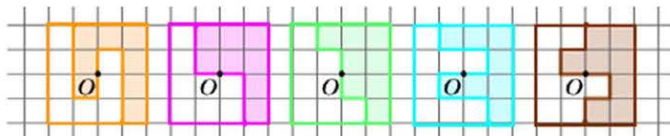


Рис. 46

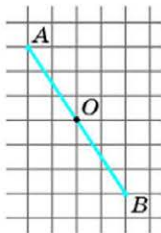


Рис. 47

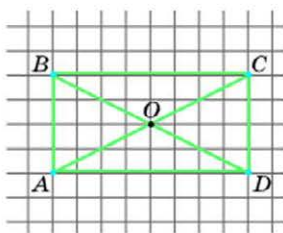


Рис. 48

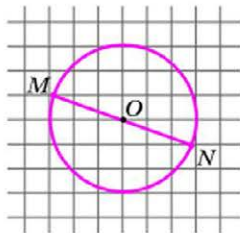


Рис. 49

пары точек A и B и проведя аналогичные рассуждения, получим те же самые части квадрата, только расположенные иначе.

Следовательно, имеется только 6 различных многоугольников, на которые можно разрезать квадрат.

Итак, существует шесть способов разрезания этого квадрата на две равные части так, чтобы линия разреза шла по линейкам клетчатой бумаги.

Фигуру, которая при повороте вокруг точки O на 180° совмещается сама с собой, называют **симметричной относительно точки O** . Говорят ещё, что она имеет **центр симметрии**. Считается, что центр симметрии симметричен сам себе.

Например, отрезок AB симметричен относительно точки O — середины этого отрезка (рис. 47). Прямоугольник $ABCD$ симметричен относительно точки пересечения его диагоналей AC и BD — точки O (рис. 48). Окружность с центром O симметрична относительно своего центра (рис. 49). Прямая симметрична относительно любой своей точки.

396. Какая точка координатной оси симметрична относительно начала координат точке: а) 5; б) -7 ; в) 0?

397. Объясните, какие две точки называют симметричными относительно точки O .

398. По рисунку 50 определите, какая точка симметрична относительно точки O точке: а) A ; б) B ; в) C ; г) D ; д) M ; е) N ; ж) O .

399. По рисунку 50 определите, какой отрезок симметричен относительно точки O отрезку:

- а) AB ; б) AD ; в) BC ; г) AO ;
 д) BO ; е) OC ; ж) BD ; з) MN .

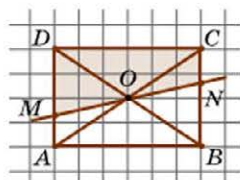


Рис. 50

- 400.** По рисунку 50 определите, какой фигуре симметричен относительно точки O :
- а) треугольник BCO ; б) треугольник ADC ;
 в) треугольник CNO ; г) прямоугольник $ABCD$;
 д) четырёхугольник $DCNM$.

- 401.** На клетчатой бумаге изображён прямоугольник 3×4 (рис. 51). Найдите пять способов разрезания прямоугольника на две равные части так, чтобы линия разреза шла по линиям клетчатой бумаги.

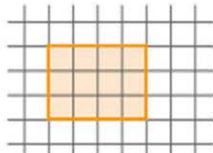


Рис. 51

- 402.** На клетчатой бумаге изобразите прямоугольник 3×5 , из которого удалён центральный квадрат (рис. 52). Найдите пять способов разрезания оставшейся фигуры на две равные части так, чтобы линия разреза шла по линиям клетчатой бумаги.

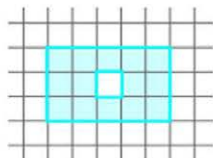


Рис. 52

- 403.** На клетчатой бумаге изображён квадрат 6×6 . Найдите шесть способов разрезания квадрата на две равные части так, чтобы линия разреза шла по линиям клетчатой бумаги.

- 404.** Можно ли квадрат 5×5 , изображённый на клетчатой бумаге, разрезать на две равные части так, чтобы линия разреза шла по линиям клетчатой бумаги?

Доказываем

- 405.** Докажите, что любая прямая, проходящая через центр симметрии прямоугольника, делит его на две равные части.
- 406.** Докажите, что любая прямая, проходящая через центр симметрии фигуры, делит её на две равные части.

- 407.** Постройте окружность с центром O . Отметьте на ней точку M . Постройте точку N , симметричную точке M относительно точки O . Верно ли, что окружность симметрична относительно своего центра?

- 408.** Постройте круг с центром O . Отметьте внутри круга точку M . Постройте точку N , симметричную точке M относительно точки O . Верно ли, что круг симметричен относительно своего центра?

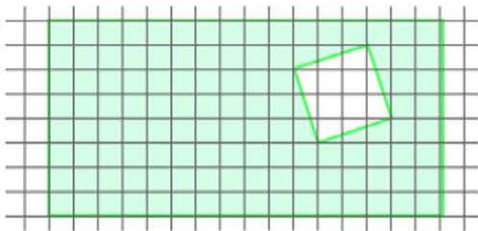


Рис. 53

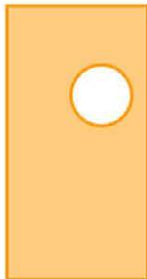


Рис. 54

- 409.** Дан отрезок AB и точка O вне этого отрезка. Постройте отрезок A_1B_1 , симметричный отрезку AB , так, чтобы точки A и A_1 , B и B_1 были симметричны относительно точки O . Соедините точки A и B_1 , A_1 и B . Укажите все пары отрезков, симметричных друг другу относительно точки O . Какие из построенных отрезков симметричны сами себе относительно точки O ?
- 410.** Дан треугольник ABC . Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки A .
- 411.** Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O , лежащей на стороне AB .
- *412.** Из прямоугольника вырезали квадрат (рис. 53). Постройте прямую, которая делит площадь закрашенной фигуры пополам.
- *413.** Вороне как-то Бог послал кусочек сыра... Предположим, что, в отличие от героини известной басни, наша Ворона захотела разделить сыр поровну с Лисицей. Как она должна разрезать по прямой кусок сыра, если этот кусок имеет форму прямоугольника с круглой дыркой (рис. 54)? (Толщина куска сыра во всех местах одна и та же.)

2 ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Первое известное нам упоминание отрицательных чисел встречается в одной из книг «Математика в девяти книгах» (Джань Цань, III в. до н. э., Китай). Отрицательное число тогда понималось как долг, а положительное — как имущество. Сложение и вычитание отрицательных чисел производилось на основе рассуждений о долге. Например, правило сложения формулировалось так: «Если к одному долгу прибавить другой долг, то в результате получится долг, а не имущество». Знака «минус» тогда не было, а чтобы отличать положительные и отрицательные числа, Джань Цань писал их чернилами разных цветов.

Древнегреческий учёный Диофант (III в.) свободно оперировал отрицательными числами. Они постоянно встречаются в промежуточных вычислениях во многих задачах его «Арифметики». Например, правило умножения с отрицательными числами он формулировал так: «Вычитаемое, умноженное на вычитаемое, даёт прибавляемое, а вычитаемое, умноженное на прибавляемое, даёт вычитаемое».

В VI—VII веках нашей эры индийские математики уже пользовались отрицательными числами, по-прежнему понимая их как долг. Впервые все четыре арифметических действия с отрицательными числами приведены индийским математиком и астрономом Брамагуптой (598—660). Например, правило деления он формулировал так: «Положительное, делённое на положительное, или отрицательное, делённое на отрицательное, становится положительным. Но положительное, делённое на отрицательное, и отрицательное, делённое на положительное, остаётся отрицательным».

Независимо от индийцев к пониманию отрицательных чисел как противоположности положительных пришёл итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (XIII в.).

Немецкий математик М. Штифель (XVI в.) впервые рассматривал отрицательные числа как числа, меньшие нуля («меньшие чем ничто»). Однако и в XVI—XVII веках многие европейские математики не признавали отрицательных чисел. Если такие числа встречались в вычислениях, то их называли ложными, невозможными.

Современное толкование отрицательных чисел, основанное на откладывании отрезков на координатной оси влево от нуля, было дано в XVII веке в основном в работах голландского математика А. Жирара (1595—1632) и французского математика и философа Р. Декарта (1596—1650).

Таким образом, для того чтобы разработать современный подход к отрицательным числам, понадобились усилия многих учёных на протяжении 18 веков от Джань Цаня до Декарта.

3 ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

- 414.** Запишите в строчку 5 таких чисел, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна.
- 415.** Можно ли записать в строчку 6 таких чисел, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?
- 416.** Можно ли записать в строчку 7 таких чисел, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?

- 417.** Можно ли записать в строчку 9 таких чисел, чтобы сумма любых трёх соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?
- 418.** Можно ли расставить в клетках таблицы, состоящей из трёх строк и четырёх столбцов, целые числа так, чтобы сумма чисел:
 а) в каждой строке была равна -20 , а в каждом столбце -15 ;
 б) в каждой строке была равна -20 , а в каждом столбце -16 ;
 в) в каждой строке была положительной, а в каждом столбце — отрицательной?
- 419.** В строчку записаны несколько чисел так, что сумма любых трёх соседних чисел положительна. Можно ли утверждать, что сумма всех чисел положительна, если чисел:
 а) 18; б) 19; в) 20?
- 420.** В непрозрачном мешке лежат 10 белых и 5 чёрных шаров. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть из мешка не глядя, чтобы среди них было 2 шара:
 а) белых; б) чёрных; в) разных цветов; г) одного цвета?
- 421.** В непрозрачном мешке лежат 679 белых и 679 чёрных шаров. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть из мешка не глядя, чтобы среди них было 2 шара:
 а) белых; б) чёрных; в) разных цветов; г) одного цвета?
- 422.** Имеется 3 комнаты с разными замками и 3 ключа от этих комнат. Какое наименьшее число проб нужно сделать, чтобы определить, какой ключ от какой комнаты?
- 423.** Вася возвёл натуральное число в квадрат и получил число, оканчивающееся цифрой 2. Не ошибся ли Вася?
- 424.** Ведущий телевизионной игры спросил игрока:
 — Верите ли Вы, что я не курю уже 20 дней?
 — Верю, — ответил игрок.
 — А вот и неверно, я не курю уже 24 дня!
 Правильно ли ведущий оценил ответ игрока?
- 425.** Встретились три подруги — Белова, Краснова и Чернова. На одной из них было чёрное платье, на другой — красное, на третьей — белое. Девочка в белом платье говорит Черновой: «Нам надо поменяться платьями, а то цвет наших платьев не соответствует фамилиям». Кто в каком платье был?



426. Коля, Боря, Вова и Юра заняли первые четыре места в соревновании. На вопрос, какие места они заняли, трое из них ответили:

1) Коля ни первое, ни четвертое; 2) Боря второе; 3) Вова не был последним.

Какое место занял каждый мальчик?

427. Имеется три мешка с монетами. В двух из них настоящие монеты, массой 10 г каждая, а в одном фальшивые монеты, массой 9 г каждая. Есть весы, показывающие общую массу положенных на них монет. Как с помощью одного взвешивания определить, в каком мешке фальшивые монеты, если из мешков можно брать любое число монет?

428. Решите предыдущую задачу для:

а) четырёх мешков; б) пяти мешков; в) десяти мешков.

429. В коробке лежат три пилотки — одна синяя и две красные. Учитель вызывает к доске двух учеников, которые становятся лицом к классу и закрывают глаза. Учитель надевает каждому из них на голову пилотку, а оставшуюся прячет в коробку. Ученики открывают глаза, и каждый видит пилотку своего товарища, но не видит своей. Может ли кто-нибудь из них определить цвет своей пилотки? Рассмотрите два случая:



а) надеты одна синяя и одна красная пилотка;
б) надеты две красные пилотки.

430. Решите предыдущую задачу для пяти пилоток — двух синих и трех красных и трех учащихся. Какие случаи следует рассмотреть?

431. Приехав в город, Ходжа Насреддин постучал в ворота первого дома и попросил хозяина пустить его переночевать. Денег у Насреддина не было, но была золотая цепочка из семи звеньев. Хозяин согласился приютить путника на семь дней с такими условиями:

1) за один день Насреддин платит одним звеном цепочки;
2) расплачиваться он должен ежедневно;
3) хозяин соглашался принять не более одного распиленного звена.

Смог ли Ходжа Насреддин расплатиться с хозяином?



Рис. 55

- 432.** В одной коробке лежат два белых шара, в другой — два чёрных, в третьей — один белый и один чёрный. На каждой коробке имеется табличка, но она неправильно указывает содержимое коробки (рис. 55). Из какой коробки не глядя надо вынуть шар, чтобы можно было определить содержимое каждой коробки?
- 433.** Три друга Коля, Олег и Петя играли во дворе, и один из них случайно разбил мячом оконное стекло. Коля сказал: «Это не я разбил стекло». Олег сказал: «Это Петя разбил стекло». Позднее выяснилось, что одно из этих утверждений верное, а другое нет. Кто из мальчиков разбил стекло?
- *434.** *Задачи С. А. Рачинского.* а) В будущем (1892) году думаю провести в Петербурге столько минут, сколько часов проведу в деревне. Сколько времени я проведу в Петербурге? (Время на переезды не учитывается.)
 б) У меня пять детей. Дал я им пряников поровну. Трое из них съели по 5 пряников, и тогда у всех троих осталось столько пряников, сколько у двух остальных. Сколько всех пряников роздано?
 в) От Москвы до Тамбова 450 вёрст. Выехали одновременно навстречу друг другу из Москвы почтовый, а из Тамбова товарный поезд. Второй мог бы пройти весь путь за 18 ч, а первый вдвое быстрее. Через сколько часов они встретятся?
 г) Дочь ткёт по 3 аршина в день, 4 дня она ткала одна, но затем стала ткать и мать, которая ткёт по 5 аршинов в день. Когда их тканья стало поровну, они прекратили работу. Сколько соткали они вдвоём?

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Изучая главу 3, вы познакомитесь с рациональными числами, научитесь их сравнивать, выполнять все арифметические действия с ними. Множество рациональных чисел включает в себя множество целых чисел и множество обыкновенных дробей. Вам предстоит убедиться, что для рациональных чисел выполняются те же законы сложения и умножения, что и для целых чисел и обыкновенных дробей, и рациональные числа, как и целые, можно изображать точками координатной оси.

3.1. Отрицательные дроби

Ранее изучались обыкновенные дроби — их ещё называют положительными дробями.

Например, числа $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{1}$ — это положительные дроби.

Если перед положительной дробью поставить знак «+», то получится то же самое число, т. е.

$$\frac{1}{2} = +\frac{1}{2}, \quad \frac{8}{7} = +\frac{8}{7}, \quad \frac{7}{1} = +\frac{7}{1}.$$

Если перед положительной дробью поставить знак «-», то получится новое число, которое называют отрицательным дробным числом или отрицательной дробью.

Например, числа $-\frac{1}{2}$, $-\frac{8}{7}$, $-\frac{7}{1}$ — отрицательные дроби.

Числа, отличающиеся только знаком, называют противоположными.

Например, числа $\left(+\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)$ — противоположные.

Одно из противоположных чисел положительно, другое — отрицательно. Исключением является число нуль — нуль противоположен самому себе: $0 = +\frac{0}{n} = -\frac{0}{n}$, где n — любое натуральное число.

Если перед дробью (любого знака) поставить знак «+», то получится то же самое число; если поставить знак «-», то получится число, противоположное данной дроби. Например,

$$+\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}, \quad -\left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Введём понятие абсолютной величины или модуля дроби.

Модулем положительной дроби называют саму эту дробь.

Например, модуль дроби $\frac{5}{8}$ равен $\frac{5}{8}$, что записывают так:

$$\left|\frac{5}{8}\right| = \frac{5}{8}.$$

Модулем отрицательной дроби называют противоположную ей (положительную) дробь.

Например, модуль дроби $-\frac{5}{8}$ равен $\frac{5}{8}$, что записывают так:

$$\left|-\frac{5}{8}\right| = \frac{5}{8}.$$

Модуль нуля равен нулю:

$$|0| = 0.$$

Модули противоположных чисел равны.

Например, $\left|\frac{5}{8}\right| = \left|-\frac{5}{8}\right| = \frac{5}{8}$.

Иногда знак «-» записывают не перед дробью, а в числителе или знаменателе дроби. Например, верны равенства:

$$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}, \quad -\frac{5}{7} = \frac{-5}{7} = \frac{5}{-7},$$
$$-\frac{13}{16} = \frac{-13}{16} = \frac{13}{-16}, \quad -\frac{0}{2} = \frac{-0}{2} = \frac{0}{-2}.$$

435. Запишите три отрицательные дроби.

436. Какие числа называют противоположными? Приведите примеры.

437. Какое число противоположно:

- а) числу нуль;
- б) положительному числу;
- в) отрицательному числу?

438. Что называют модулем:

- а) положительной дроби; б) отрицательной дроби; в) нуля?

439. Какие из дробей являются положительными, какие отрицательными:

$$\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{4}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{1}, -\frac{0}{2}?$$

440. Назовите дроби, противоположные дробям: $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{-4}{11}$.

441. Какое число противоположно самому себе?

Упростите запись по образцу (**442—443**):

442. а) $|8| = 8$; б) $|-7| = 7$; в) $|\frac{1}{9}| = \frac{1}{9}$; г) $|\frac{-2}{3}| = \frac{2}{3}$;

д) $|2|$; е) $|-3|$; ж) $|0|$; з) $|\frac{1}{4}|$; и) $|\frac{-1}{5}|$; к) $|\frac{2}{7}|$.

443. а) $|\frac{-1}{4}|$; б) $|\frac{-2}{9}|$; в) $|\frac{-1}{8}|$; г) $|\frac{-8}{15}|$;

д) $|\frac{-3}{8}|$; е) $|\frac{-8}{9}|$; ж) $|\frac{-1}{2}|$; з) $|\frac{-1}{5}|$.

444. Сравните:

а) $|\frac{2}{3}|$ и $|\frac{-2}{3}|$; б) $|-5|$ и $|\frac{-1}{2}|$; в) $|\frac{-1}{5}|$ и $|\frac{1}{4}|$.

445. Запишите дробь так, чтобы знак « \leftarrow » стоял в числителе по образцу:

а) $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$; б) $-\frac{5}{7}$; в) $-\frac{7}{3}$; г) $-\frac{4}{9}$; д) $-\frac{1}{9}$; е) $-\frac{13}{12}$.

446. Запишите дробь так, чтобы знак « \rightarrow » стоял в знаменателе по образцу:

а) $-\frac{3}{4} = \frac{3}{-4}$; б) $-\frac{6}{5}$; в) $-\frac{7}{8}$; г) $-\frac{8}{9}$; д) $-\frac{17}{18}$; е) $-\frac{18}{17}$.

447. Запишите дроби $\frac{-2}{7}$, $\frac{-6}{11}$, $\frac{-2}{13}$, $\frac{5}{-7}$, $\frac{4}{-9}$, $\frac{12}{-7}$ так, чтобы знак «-» стоял перед чертой дроби.

448. Равны ли дроби:

а) $-\frac{2}{3}$ и $\frac{-2}{3}$; б) $\frac{-5}{8}$ и $-\frac{5}{8}$; в) $\frac{4}{9}$ и $\frac{-4}{9}$; г) $-\frac{5}{7}$ и $\frac{5}{7}$?

449. Найдите модуль числа:

а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{-2}{3}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{5}{-9}$; д) 0; е) $-\frac{5}{4}$.

450. Вычислите:

а) $|\frac{-1}{2}| + |\frac{1}{2}|$; б) $|\frac{2}{3}| + |-\frac{1}{3}|$; в) $|\frac{-13}{23}| - |\frac{13}{23}|$;

г) $|-3\frac{2}{3}| - |-2\frac{2}{3}|$; д) $|-3\frac{1}{3}| \cdot |-2\frac{2}{5}|$; е) $|2\frac{3}{5}| : |-5\frac{1}{5}|$.

3.2. Рациональные числа

Число, которое можно записать в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и q не равно нулю, называют **рациональным числом** или **дробью**.

Например, $\frac{2}{3}$, $\frac{-6}{5}$, $\frac{8}{11}$ и $\frac{-7}{-7}$ — рациональные числа. Запись $\frac{p}{q}$ читается так: « p , делённое на q ».

Число p называют **числителем**, число q — **знаменателем** дроби $\frac{p}{q}$.

Некоторые дроби считают **равными**. Равенство дробей устанавливают при помощи основного свойства дроби:

Если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же целое, не равное нулю число, то получится равная ей дробь:

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n} \quad (1)$$

где p , q , n — целые числа, $q \neq 0$, $n \neq 0$.

Примеры: 1) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot (-2)}{4 \cdot (-2)} = \frac{-6}{-8}$; 2) $\frac{-5}{2} = \frac{(-5) \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{-15}{6}$;

3) $\frac{2}{-3} = \frac{2 \cdot (-1)}{(-3) \cdot (-1)} = \frac{-2}{3}$.

Переход от дроби $\frac{p}{q}$ к дроби $\frac{p \cdot n}{q \cdot n}$ в равенстве (1) называют **приведением дроби к новому знаменателю**, а обратный переход называют **сокращением дроби**:

$$\frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

Равенство (2) означает, что если числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель n — целое, не равное нулю число, то дробь можно сократить на n . При этом получается дробь, равная данной.

Примеры: 1) $\frac{-12}{14} = \frac{(-6) \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{-6}{7}$; 2) $\frac{-15}{-9} = \frac{(-3) \cdot 5}{(-3) \cdot 3} = \frac{5}{3}$.

Подчеркнём, что две дроби равны тогда и только тогда, когда одна из них может быть получена из другой сокращением на общий множитель её числителя и знаменателя.

Можно сказать и так: две дроби равны тогда и только тогда, когда одна из них может быть получена из другой умножением её числителя и знаменателя на одно и то же не равное нулю число.

Рациональное число $\frac{p}{q}$ есть:

- а) положительная дробь, если p и q одного знака;
- б) отрицательная дробь, если p и q разных знаков;
- в) число нуль, если $p=0$, а $q \neq 0$.

Покажем это на примерах.

1) $\frac{3}{5}$ — положительная дробь;

$$\frac{-7}{-8} = \frac{(-7) \cdot (-1)}{(-8) \cdot (-1)} = \frac{7}{8}, \text{ т. е. } \frac{-7}{-8} \text{ — положительная дробь;}$$

2) $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$, т. е. $\frac{-3}{5}$ — отрицательная дробь;

$$\frac{3}{-8} = -\frac{3}{8} = -\frac{3}{8}, \text{ т. е. } \frac{3}{-8} \text{ — отрицательная дробь;}$$

3) $\frac{0}{3} = 0$, $\frac{0}{-5} = \frac{0 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{0}{5} = 0$, т. е. $\frac{0}{3}$ — нуль, $\frac{0}{-5}$ — нуль.

Для любого целого числа p верно равенство

$$\frac{p}{1} = p.$$

Оно означает, что

любое целое число является рациональным числом.

Например, $\frac{-3}{1} = -\frac{3}{1} = -3$.

Пользуясь основным свойством дроби, можно любую дробь привести к положительному знаменателю.

Примеры: 1) $\frac{5}{-3} = \frac{5 \cdot (-1)}{(-3) \cdot (-1)} = \frac{-5}{3}$; 2) $\frac{-6}{-7} = \frac{(-6) \cdot (-1)}{(-7) \cdot (-1)} = \frac{6}{7}$.

Следовательно,

любое рациональное число может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где q — натуральное, а p — целое число.

- 451.** Какое число называют рациональным? Назовите несколько рациональных чисел.
- 452.** Является ли натуральное число рациональным?
- 453.** Является ли целое число рациональным?
- 454.** Является ли положительная дробь рациональным числом?
- 455.** Сформулируйте основное свойство дроби. Приведите пример использования основного свойства дроби для приведения дроби к новому знаменателю.
- 456.** В каком случае дробь можно сократить? На основании какого свойства сокращают дроби? Приведите примеры.
- 457.** В каком случае дробь положительна? отрицательна? Приведите примеры.
- 458.** Любую ли дробь можно привести к положительному знаменателю?
- 459.** Сократите дроби $\frac{8}{20}$, $\frac{35}{36}$, $\frac{42}{48}$, $\frac{764}{828}$, $\frac{792}{891}$.

460. Приведите дроби к знаменателю 48: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{15}{16}$.

461. Приведите дробь к положительному знаменателю:

а) $\frac{1}{-2}$; б) $\frac{1}{-3}$; в) $\frac{-2}{-3}$; г) $\frac{-2}{-5}$; д) $\frac{7}{-4}$; е) $\frac{12}{-7}$.

462. Приведите дроби $\frac{-1}{2}$ и $\frac{-1}{4}$ к знаменателю: а) 8; б) 28; в) 36.

463. Приведите к знаменателю 60 дробь:

а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{-4}{5}$; г) $\frac{-11}{12}$; д) $\frac{13}{-15}$; е) $\frac{19}{-20}$.

464. Упростите запись рационального числа:

а) $\frac{-1}{-2}$; б) $\frac{-3}{-4}$; в) $\frac{-49}{56}$; г) $\frac{72}{-67}$;

д) $-\frac{81}{-72}$; е) $-\frac{96}{-143}$; ж) $-\frac{-15}{42}$; з) $\frac{-55}{-75}$;

и) $-\frac{-125}{625}$; к) $\frac{100}{-8}$; л) $\frac{32}{-512}$; м) $\frac{-32}{-128}$.

465. Сократите дробь, запишите результат в виде дроби с положительным знаменателем:

а) $\frac{-8}{-12}$; б) $\frac{-35}{21}$; в) $\frac{36}{-45}$; г) $\frac{45}{-63}$;

д) $-\frac{35}{77}$; е) $\frac{-96}{-128}$; ж) $\frac{-124}{-196}$; з) $\frac{252}{-444}$.

466. Найдите число x , для которого верно равенство:

а) $\frac{-1}{3} = \frac{x}{3}$; б) $\frac{-4}{5} = \frac{x}{20}$; в) $-\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$;

г) $-\frac{5}{6} = \frac{x}{30}$; д) $\frac{-4}{5} = \frac{-20}{x}$; е) $-\frac{x}{3} = \frac{-12}{18}$.

Упростите запись (**467–468**):

467. а) $-\frac{-5}{7}$; б) $-\frac{4}{-3}$; в) $-\frac{-3}{7}$; г) $-\frac{9}{-10}$.

468. а) $-\left(\frac{-7}{9}\right) = -\frac{-7}{9} = \frac{-(-7)}{9} = \frac{7}{9}$;

б) $-\left(-\frac{4}{9}\right)$; в) $-\left(-\frac{-1}{3}\right)$; г) $-\left(-\frac{2}{-13}\right)$; д) $-\left(-\frac{-1}{-2}\right)$.

469. Равны ли рациональные числа:

а) $\frac{1}{4}$ и $\frac{-8}{-32}$; б) $\frac{-75}{100}$ и $\frac{3}{-4}$; в) $\frac{24}{-40}$ и $\frac{-27}{45}$; г) $\frac{-77}{-88}$ и $\frac{63}{72}$?

470. Запишите в виде целого числа дробь:

а) $\frac{2}{1}$; б) $\frac{-13}{1}$; в) $\frac{0}{2}$; г) $\frac{-14}{7}$; д) $\frac{-32}{-4}$; е) $\frac{44}{-11}$.

471. Даны рациональные числа:



$\frac{17}{9}$, $\frac{37}{-48}$, $\frac{-15}{-5}$, $\frac{0}{-7}$, $\frac{-17}{-1}$, $\frac{16}{-8}$, $\frac{-46}{-23}$, $\frac{-20}{-30}$

Выпишите числа, являющиеся: а) натуральными; б) целыми.

472. Найдите равные среди рациональных чисел:

$$-\frac{3}{9}, \frac{-5}{-10}, \frac{4}{-8}, \frac{-25}{50}, \frac{0}{100}, \frac{17}{34}, \frac{0}{-72}, \frac{100}{-300}.$$

473. Запишите три дроби с положительным знаменателем, равные числу: а) 5; б) -2; в) -28; г) 0.

474. Является ли дробь положительной, отрицательной:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{-5}{9}$; в) $\frac{4}{-3}$; г) $\frac{0}{-1}$; д) $\frac{-6}{-8}$; е) $\frac{-1}{-3}$; ж) $\frac{-7}{-9}$; з) $\frac{-9}{17}$?

475. Назовите и запишите дробь, противоположную дроби:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{-1}{3}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{-5}{6}$; д) $\frac{-7}{8}$; е) $\frac{-1}{-3}$.

***476.** Одинаковые или разные знаки имеют числа m и n ($mn \neq 0$), если верно равенство: а) $\left| \frac{m}{n} \right| = \frac{m}{n}$; б) $\left| \frac{m}{n} \right| = -\frac{m}{n}$?

3.3. Сравнение рациональных чисел

Любые две дроби можно привести к общему положительному знаменателю. Например, приведём дроби $\frac{2}{-7}$ и $-\frac{3}{5}$ к общему положительному знаменателю:

$$\frac{-5/2}{-7} = \frac{2 \cdot (-5)}{(-7) \cdot (-5)} = \frac{-10}{35}, \quad \frac{7/3}{5} = \frac{(-3) \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{-21}{35}.$$

Две дроби с общим положительным знаменателем равны, если равны их числители.

Из двух дробей с общим положительным знаменателем больше та, у которой числитель больше.

Таким образом, сравнение дробей сводится к сравнению целых чисел — числителей дробей с общим положительным знаменателем.

Пример 1. Сравним дроби $\frac{-6}{7}$ и $\frac{-5}{7}$.

Решение. Так как $-6 < -5$, то $\frac{-6}{7} < \frac{-5}{7}$.

Чтобы сравнить две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему положительному знаменателю и сравнить полученные дроби.

Пример 2. Сравним дроби $\frac{5}{-8}$ и $-\frac{3}{4}$.

Решение. $\frac{5}{-8} = \frac{-5}{8}$, $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{(-3) \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{-6}{8}$. Так как $-5 > -6$, то $\frac{-5}{8} > \frac{-6}{8}$. Поэтому $\frac{5}{-8} > -\frac{3}{4}$.

Отметим, что из правила сравнения дробей следует, что:

- 1) любая положительная дробь больше нуля;
- 2) любая отрицательная дробь меньше нуля;
- 3) любая положительная дробь больше отрицательной;
- 4) две дроби равны тогда и только тогда, когда после приведения их к общему положительному знаменателю равны их числители.

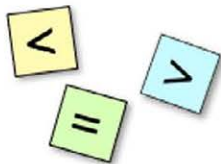
- 477.** Как сравнивают две дроби:
а) с общим положительным знаменателем;
б) с разными знаменателями?

- 478.** Сформулируйте правило сравнения: положительной дроби с нулём; отрицательной дроби с нулём; положительной дроби с отрицательной.

Сравните числа (479–484):

- 479.** а) 15 и -45 ; б) 79 и 0;
в) -81 и 0; г) 48 и -1000 ;
д) -999 и -1 ; е) 46 и -46 .

- 480.** а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$; б) $\frac{49}{50}$ и $\frac{4}{5}$; в) $\frac{11}{20}$ и $\frac{17}{30}$.



481. а) $\frac{37}{452}$ и $\frac{207}{388}$; б) $\frac{456}{729}$ и $\frac{895}{891}$; в) $\frac{999}{1000}$ и $\frac{1000}{1001}$.

482. а) $\frac{6}{7}$ и $\frac{8}{7}$; б) 1 и $\frac{7}{8}$; в) 1 и $\frac{9}{8}$; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

483. а) -1 и -2 ; б) -12 и -7 ; в) $-\frac{1}{2}$ и 0 ; г) 0 и $-\frac{3}{4}$.

484. а) $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{4}{5}$ и $-\frac{3}{5}$; в) $-\frac{1}{7}$ и $-\frac{3}{7}$; г) $-\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{-8}$.

485. Запишите в порядке возрастания числа:

$$-\frac{1}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{6}{8}, -\frac{2}{8}, -\frac{9}{8}, -1, -\frac{3}{8}, -\frac{4}{8}.$$

486. Запишите в порядке убывания числа: $-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{15}{4}, -\frac{3}{4}, -2$.

487. Найдите дробь, которая больше одной из данных дробей, но меньше другой:

а) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{4}{5}$; б) $-\frac{9}{10}$ и $-\frac{3}{10}$; в) $-\frac{12}{13}$ и $\frac{4}{-13}$;

г) $-\frac{8}{11}$ и $-\frac{5}{11}$; д) $-\frac{1}{8}$ и $-\frac{7}{8}$; е) $-\frac{3}{7}$ и $-\frac{5}{7}$.

488. Сравните числа:

а) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{6}$ и $-\frac{4}{11}$;

г) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{4}$; д) $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{7}{10}$; е) $-\frac{5}{9}$ и $-\frac{2}{3}$;

ж) $-\frac{11}{24}$ и $-\frac{1}{2}$; з) $-\frac{5}{28}$ и $-\frac{1}{7}$; и) $-\frac{25}{32}$ и $-\frac{5}{8}$;

к) $-\frac{9}{10}$ и $-\frac{14}{15}$; л) $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{7}{8}$; м) $-\frac{13}{24}$ и $-\frac{17}{36}$.

489. Запишите дроби $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$ в порядке возрастания.

490. Запишите дроби $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}$ в порядке убывания.

491. Верно ли, что если $-\frac{4}{7} > -\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3} > -\frac{4}{5}$, то $-\frac{4}{7} > -\frac{4}{5}$?

492. Существуют ли дроби $\frac{p}{q}$, для которых верно неравенство $-\frac{2}{5} < \frac{p}{q} < -\frac{1}{5}$? Если существуют, то найдите три такие дроби.

493. Можно ли назвать 10 дробей, больших одной из данных дробей, но меньших другой:

а) $-\frac{39}{40}$ и $-\frac{1}{40}$; б) $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{4}$?

Можно ли назвать 100, 1000, 10 000 таких дробей?

494. Найдите дробь, которая больше одной из данных дробей, но меньше другой:

а) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{5}{6}$ и $-\frac{2}{3}$; в) $-\frac{3}{8}$ и $-\frac{3}{4}$;
г) $-\frac{3}{20}$ и $-\frac{7}{30}$; д) $-\frac{3}{7}$ и $-\frac{2}{9}$; е) $-\frac{10}{11}$ и $-\frac{19}{20}$.

495. Сравните числа:

а) $-\frac{1}{2}$ и -1 ; б) $-\frac{8}{8}$ и -1 ; в) $-\frac{9}{8}$ и -1 ; г) $-\frac{498}{497}$ и -1 .

***496.** Как можно сравнить дроби, не приводя их к общему положительному знаменателю, если числители этих дробей одинаковые положительные целые числа?

3.4. Сложение и вычитание дробей

Сумма двух дробей с общим положительным знаменателем есть дробь с тем же знаменателем и числителем, равным сумме числителей.

Примеры: 1) $\frac{-2}{11} + \frac{-3}{11} = \frac{-2+(-3)}{11} = \frac{-5}{11} = -\frac{5}{11}$;

2) $\frac{-2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{-2+3}{7} = \frac{1}{7}$.

Отметим, что сумма противоположных дробей равна нулю. Например, $\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} + \frac{-3}{5} = \frac{3+(-3)}{5} = \frac{0}{5} = 0$.

Разностью двух дробей называют такую дробь, которая в сумме с вычитаемым даёт уменьшаемое.

Например, $\frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$, так как $\frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$;
 $-\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}$, так как $-\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$.

Разность двух дробей с общим положительным знаменателем есть дробь с тем же знаменателем и числителем, равным разности числителей уменьшаемого и вычитаемого.

Примеры: 3) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$;

4) $\frac{-3}{5} - \frac{-4}{5} = \frac{-3-(-4)}{5} = \frac{-3+4}{5} = \frac{1}{5}$.

Чтобы вычислить сумму (или разность) дробей с разными знаменателями, надо сначала привести их к общему положительному знаменателю.

Отметим, что вычисления будут более простыми, если в качестве общего положительного знаменателя взять наименьший общий положительный знаменатель данных дробей.

Примеры: 5) $\frac{3}{5} - \frac{11}{15} = \frac{9}{15} - \frac{11}{15} = \frac{9-11}{15} = \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$;

6) $\frac{-3}{30} - \frac{2}{45} = \frac{-3}{90} - \frac{4}{90} = \frac{-3-4}{90} = \frac{-3+4}{90} = \frac{1}{90}$;

7) $-\frac{3}{5} + \frac{2}{-7} = \frac{-7 \cdot -3}{5 \cdot -7} + \frac{5 \cdot -2}{-7 \cdot 5} = \frac{-21}{35} + \frac{-10}{35} = \frac{-31}{35} = -\frac{31}{35}$.

Отметим, что дроби любого знака $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ можно складывать и вычитать по формулам:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s}, \quad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s - q \cdot r}{q \cdot s}.$$

Например, $\frac{3}{5} - \frac{11}{15} = \frac{3 \cdot 15 - 5 \cdot 11}{5 \cdot 15} = \frac{45 - 55}{75} = -\frac{10}{75} = -\frac{2}{15} = \frac{-2}{15}$.

Подчеркнём, что, найдя наименьший общий знаменатель дробей, иногда можно намного упростить вычисления их суммы или разности, чем по этим формулам (см. примеры 5 и 6).

Разность дробей a и b равна сумме уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

○ **Доказательство.** Любые две дроби можно привести к общему знаменателю. Пусть $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{q}$. Тогда

$$a - b = \frac{p}{q} - \frac{r}{q} = \frac{p-r}{q} = \frac{p+(-r)}{q} = \frac{p}{q} + \frac{-r}{q} = \frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{q}\right) = a + (-b). \bullet$$

Это правило позволяет упрощать вычисления. Например,

$$-\frac{9}{16} - \left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{-9+1}{16} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}.$$

Из правил сложения дробей следует, что их можно складывать по тем же правилам, что и целые числа, т. е. сначала определять знак суммы, потом выполнять действия с модулями. Это позволяет иногда упрощать вычисления. Например,

$$\begin{aligned} -\frac{2}{11} + \left(-\frac{3}{11}\right) &= -\left(\frac{2}{11} + \frac{3}{11}\right) = -\frac{5}{11}; \\ -\frac{2}{7} + \frac{5}{7} &= +\left(\frac{5}{7} - \frac{2}{7}\right) = \frac{3}{7}; \quad \frac{3}{11} + \left(-\frac{7}{11}\right) = -\left(\frac{7}{11} - \frac{3}{11}\right) = -\frac{4}{11}. \end{aligned}$$

497. Сформулируйте правила сложения и вычитания дробей с общим положительным знаменателем.

498. Чему равна сумма противоположных дробей?

499. Как вычислить сумму или разность дробей с разными знаменателями?

Выполните действия (500–501):

500. а) $\frac{8}{9} + \frac{5}{9}$; б) $\frac{17}{25} - \frac{8}{25}$; в) $\frac{31}{32} + \frac{63}{64}$; г) $\frac{23}{68} - \frac{5}{17}$; д) $\frac{50}{49} + \frac{15}{56}$.

501. а) $(-56) + 17$; б) $42 + (-29)$; в) $(-39) + (-57)$;
г) $(-48) + 81$; д) $37 + (-82)$; е) $(-68) + (-51)$.

502. По каким формулам можно складывать и вычитать дроби?

Вычислите (503–514):

503. а) $\frac{-1}{2} + \frac{-1}{2}$; б) $\frac{-1}{3} + \frac{-1}{3}$; в) $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{3}$; г) $\frac{-2}{7} + \frac{-5}{7}$; д) $\frac{-7}{12} + \frac{-1}{12}$.

- 504.** а) $\frac{-1}{3} + \frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{5} + \frac{-3}{5}$;
 г) $\frac{3}{7} + \frac{-4}{7}$; д) $\frac{8}{13} + \frac{-12}{13}$; е) $\frac{19}{25} + \frac{-24}{25}$;
- 505.** а) $\frac{1}{2} + \frac{-1}{2}$; б) $\frac{-5}{6} + \frac{5}{6}$; в) $\frac{-2}{3} + \frac{2}{3}$;
- 506.** а) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$; в) $\frac{2}{7} - \frac{5}{7}$;
 г) $\frac{7}{12} - \frac{11}{12}$; д) $\frac{-8}{11} - \frac{3}{11}$; е) $-\frac{5}{17} - \frac{10}{17}$;
- 507.** а) $\frac{-2}{7} - \frac{-5}{7}$; б) $\frac{-4}{9} - \frac{-8}{9}$; в) $-\frac{1}{10} - \frac{-7}{10}$;
 г) $-\frac{12}{19} - \frac{7}{19}$; д) $\frac{-4}{5} - \frac{-3}{5}$; е) $-\frac{1}{24} - \frac{11}{24}$;
- 508.** а) $\frac{-1}{2} + \frac{-1}{4}$; б) $\frac{-1}{3} + \frac{1}{6}$; в) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{8} + \frac{-1}{4}$; д) $\frac{3}{10} + \frac{-7}{100}$;
- 509.** а) $\frac{3}{-5} - \frac{9}{10}$; б) $\frac{15}{-24} - \frac{3}{8}$; в) $\frac{-2}{3} - \frac{5}{6}$;
 г) $-\frac{7}{6} - \frac{5}{24}$; д) $\frac{2}{5} - \frac{13}{50}$; е) $-\frac{50}{160} - \frac{9}{16}$;
- 510.** а) $-\frac{1}{6} + \frac{1}{9}$; б) $\frac{3}{10} - \frac{2}{15}$; в) $-\frac{2}{10} - \frac{6}{15}$;
 г) $\frac{3}{8} - \frac{2}{9}$; д) $-\frac{5}{12} + \frac{4}{15}$; е) $\frac{2}{16} - \frac{-3}{39}$;
- 511.** а) $\frac{5}{8} + \left(-\frac{9}{8}\right)$; б) $-\frac{3}{13} + \left(-\frac{8}{13}\right)$; в) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}$;
 г) $\frac{3}{8} + \left(-\frac{3}{4}\right)$; д) $-\frac{7}{15} + \left(-\frac{2}{3}\right)$; е) $-\frac{7}{8} - \frac{15}{16}$;
 ж) $\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)$; з) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$; и) $-\frac{2}{21} + \frac{3}{14}$;
- 512.** а) $-\frac{9}{180} - \frac{7}{120}$; б) $-\frac{4}{210} + \frac{5}{140}$; в) $\frac{-7}{480} + \frac{8}{180}$;
- 513.** а) $-\frac{7}{15} + \frac{2}{15} - \frac{1}{5}$; б) $-\frac{1}{6} - \frac{5}{12} - \frac{7}{24}$; в) $-\frac{3}{13} - \frac{5}{13} + \frac{3}{26}$;
 г) $\frac{9}{28} - \frac{4}{7} - \frac{1}{4}$; д) $\frac{10}{27} - \frac{5}{18} + \frac{8}{9}$; е) $\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$;

514. а) $-\frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{7}{20}$; б) $-\frac{3}{20} - \frac{7}{30} + \frac{2}{40}$; в) $\frac{11}{60} - \frac{23}{30} - \frac{17}{20}$.

515. Найдите число x , для которого верно равенство:

а) $x + \frac{1}{8} = -\frac{5}{8}$; б) $\frac{1}{7} + x = -\frac{3}{7}$; в) $x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$;

г) $x - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; д) $\frac{2}{3} - x = -\frac{1}{7}$; е) $\frac{1}{6} - x = -\frac{4}{9}$.

516. Найдите число, которое:

а) на $\frac{1}{2}$ больше числа $-\frac{1}{2}$; б) на $\frac{1}{4}$ меньше числа $\frac{1}{6}$.

517. Запишите разность дробей в виде равной ей суммы дробей:

а) $\frac{1}{3} - \frac{4}{3}$; б) $-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}$; в) $\frac{-4}{7} - \frac{-8}{7}$.

518. Вычислите, предварительно заменив разность дробей равной ей суммой:

а) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)$; б) $\frac{4}{9} - \left(-\frac{7}{9}\right)$; в) $-\frac{9}{16} - \left(-\frac{3}{8}\right)$;

г) $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{8}\right)$; д) $-\frac{9}{10} - \left(-\frac{15}{16}\right)$; е) $\frac{25}{26} - \left(-\frac{11}{13}\right)$.

3.5. Умножение и деление дробей

Дроби любого знака умножают и делят по тем же правилам, что и положительные дроби:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s},$$

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}, \text{ где } r \neq 0.$$

Примеры: 1) $\frac{-3}{2} \cdot \frac{4}{-5} = \frac{(-3) \cdot 4}{2 \cdot (-5)} = \frac{(-1) \cdot 3 \cdot 4}{(-1) \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot \cancel{4}}{2 \cdot 5} = \frac{6}{5}$;

2) $(-5) \cdot \frac{2}{-3} = \frac{-5}{1} \cdot \frac{2}{-3} = \frac{(-5) \cdot 2}{1 \cdot (-3)} = \frac{(-1) \cdot 5 \cdot 2}{(-1) \cdot 3} = \frac{10}{3}$;

3) $\frac{-3}{2} : \frac{4}{5} = \frac{(-3) \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{-15}{8} = -\frac{15}{8}$;

4) $\frac{7}{-8} : (-3) = \frac{7}{-8} : \frac{-3}{1} = \frac{7 \cdot 1}{(-8) \cdot (-3)} = \frac{7}{24}$.

Отметим равенство, которое легко получается на основании правила деления:

$$p : q = \frac{p}{q},$$

где p и q — целые числа ($q \neq 0$).

Доказательство. $p : q = \frac{p}{1} : \frac{q}{1} = \frac{p \cdot 1}{1 \cdot q} = \frac{p}{q}$.

Таким образом,

дробь $\frac{p}{q}$ можно рассматривать как частное от деления её числителя p на знаменатель q .

Например, $\frac{2}{3} = 2 : 3$; $-\frac{2}{5} = -2 : 5$.

Чтобы умножить дробь на целое число, можно её числитель умножить на это число.

Доказательство. $\frac{p}{q} \cdot r = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{1} = \frac{p \cdot r}{q \cdot 1} = \frac{p \cdot r}{q}$.

Примеры: 5) $\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{6}{5}$;

$$6) (-7) \cdot \frac{1}{4} = \frac{-7 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{-7 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{-7}{4}.$$

Эти вычисления обычно записывают короче:

$$\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}; \quad (-7) \cdot \frac{1}{4} = \frac{(-7) \cdot 1}{4} = \frac{-7}{4}.$$

Чтобы разделить дробь на целое число, не равное нулю, можно знаменатель дроби умножить на это число.

Доказательство. $\frac{p}{q} : r = \frac{p}{q} : \frac{r}{1} = \frac{p \cdot 1}{q \cdot r} = \frac{p}{q \cdot r}$.

Например, $\frac{-7}{4} : 3 = \frac{-7}{4} : \frac{3}{1} = \frac{(-7) \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{-7}{12}$, или короче:

$$\frac{-7}{4} : 3 = \frac{-7}{4 \cdot 3} = \frac{-7}{12}.$$

Числа $\frac{p}{q}$ и $\frac{q}{p}$, где p и q не равны нулю, называют **взаимно обратными**. Дробь $\frac{p}{q}$ называют **обратной** дроби $\frac{q}{p}$.

Например, дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{-5}$ и $\frac{-5}{1}$ — взаимно обратные числа.

Произведение взаимно обратных чисел равно 1.

Доказательство. $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{q \cdot p} = \frac{1}{1} = 1$.

Чтобы одну дробь разделить на другую, отличную от нуля, можно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Например, $\frac{5}{7} : \frac{-2}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{-2}$.

Для любой дроби $a = \frac{p}{q}$ верно равенство $(-1) \cdot a = -a$.

Доказательство. $(-1) \cdot a = (-1) \cdot \frac{p}{q} = \frac{(-1) \cdot p}{q} = \frac{-p}{q} = -\frac{p}{q} = -a$.

Отметим, что определением степени с натуральным показателем можно пользоваться и для дробей любого знака.

Примеры: 7) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{-2}{3} \cdot \frac{-2}{3} = \frac{(-2) \cdot (-2)}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$;

$$8) \left(-\frac{5}{4}\right)^1 = -\frac{5}{4}.$$

Из правил умножения и деления дробей любого знака следует, что их можно умножать и делить по тем же правилам, что и целые, отличные от нуля числа, т. е. сначала определять знак результата, а потом выполнять действия с модулями. Например,

$$-\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = +\frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \frac{3}{20}; \quad \frac{8}{9} : \left(-\frac{4}{27}\right) = -\frac{8 \cdot 27}{9 \cdot 4} = -\frac{6}{1} = -6.$$

519. По каким правилам умножают и делят дроби любого знака?

520. Как умножить дробь на целое число?

521. Как разделить дробь на целое число, не равное нулю?

522. Какие числа называют взаимно обратными?

Выполните действия (523–525):

523. а) $75 \cdot (-64)$; б) $(-57) \cdot (-129)$; в) $(-144) \cdot 55$;
г) $912 : (-48)$; д) $(-1596) : 57$; е) $(-2701) : (-37)$.

524. а) $161\,784 : (-321)$; б) $-2\,164\,320 : 432$;
в) $-4\,101\,630 : (-507)$; г) $-1\,936\,980 : (-918)$.

525. а) $\frac{34}{35} \cdot \frac{51}{55}$; б) $\frac{37}{38} \cdot \frac{57}{148}$; в) $\frac{54}{125} \cdot 35$;
г) $\frac{115}{116} : 62$; д) $\frac{351}{625} \cdot \frac{250}{182}$; е) $99 : \frac{143}{120}$.

Сократите дробь (526–528):

526. а) $\frac{36 \cdot (-112)}{126 \cdot (-63)}$; б) $\frac{184 \cdot (-49)}{84 \cdot (-69)}$; в) $\frac{(-315) \cdot 57}{114 \cdot (-108)}$;
г) $\frac{(-105) \cdot 84}{196 \cdot 125}$; д) $\frac{(-111) \cdot (-9)}{78 \cdot 74}$; е) $\frac{(-888) \cdot 55}{77 \cdot 999}$.

527. а) $\frac{(-1) \cdot 3}{6 \cdot (-4)}$; б) $\frac{(-3) \cdot 4}{6 \cdot (-5)}$; в) $\frac{(-4) \cdot 10}{(-30) \cdot 14}$;
г) $\frac{(-8) \cdot 18}{(-28) \cdot 6}$; д) $\frac{(-12) \cdot (-5)}{(-21) \cdot 10}$; е) $\frac{(-75) \cdot (-24)}{(-32) \cdot (-100)}$.

528. а) $\frac{-3 \cdot 8 \cdot (-6)}{18 \cdot (-4)}$; б) $\frac{-7 \cdot 16}{-14 \cdot (-2) \cdot (-10)}$; в) $\frac{-2 \cdot (-3) \cdot (-6)}{-3 \cdot (-8) \cdot (-10)}$;
г) $\frac{-96 \cdot (-125)}{-75 \cdot (-128)}$; д) $\frac{56 \cdot (-77)}{-121 \cdot (-49)}$; е) $\frac{-128 \cdot (-92)}{-256 \cdot (-48)}$.

529. Вычислите произведение по образцу:

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{-1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

а) $\frac{-3}{7} \cdot \frac{5}{9}$; б) $\frac{-3}{8} \cdot \frac{-4}{5}$; в) $\frac{-9}{10} \cdot \frac{-1}{2}$;
г) $\frac{-7}{2} \cdot \frac{4}{-35}$; д) $\frac{-5}{6} \cdot \frac{3}{10}$; е) $\frac{-7}{32} \cdot \frac{4}{-21}$;
ж) $-\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{75}{2}\right)$; з) $\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{9}{16}\right)$; и) $-\frac{18}{5} \cdot \left(-\frac{4}{81}\right)$.

Вычислите (530–531):

530. а) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$; в) $-\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$;
г) $-\frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; д) $\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; е) $-\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5}$.

531. а) $-\frac{1}{3} \cdot 2$; б) $7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $-4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$;
 г) $\frac{3}{4} \cdot (-8)$; д) $\frac{25}{28} \cdot (-14)$; е) $-12 \cdot \left(-\frac{13}{24}\right)$.

532. Запишите частное в виде дроби с положительным знаменателем, сократите полученную дробь:
 а) $-2 : 6$; б) $-5 : 15$; в) $-10 : (-20)$; г) $-4 : (-16)$.

533. Являются ли взаимно обратными числа:

а) $\frac{-1}{2}$ и $-\frac{4}{2}$; б) $\frac{2}{-3}$ и $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{1}{4}$ и -4 ;
 г) $-\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{-5}$; д) -2 и $\frac{-1}{2}$; е) -1 и 1 ?

534. Назовите делимое и делитель, найдите дробь, обратную делителю, замените деление умножением на дробь, обратную делителю:

а) $\frac{3}{5} : \frac{2}{3}$; б) $-\frac{4}{5} : \frac{3}{8}$; в) $-4 : \frac{-2}{3}$; г) $-\frac{3}{7} : (-9)$.

Вычислите (**535–540**):

535. а) $\frac{-3}{5} : \frac{5}{-9}$; б) $\frac{16}{-25} : \frac{8}{-15}$; в) $\frac{9}{-10} : \frac{1}{2}$; г) $\frac{2}{3} : \frac{6}{-7}$.

536. а) $-\frac{3}{7} : \frac{5}{6}$; б) $\frac{16}{-25} : \left(-\frac{8}{15}\right)$; в) $-\frac{9}{20} : \left(-\frac{18}{25}\right)$;
 г) $\frac{28}{63} : \left(-\frac{9}{7}\right)$; д) $-\frac{15}{16} : \left(-\frac{10}{24}\right)$; е) $-\frac{15}{17} : \frac{25}{34}$.

537. а) $\frac{32}{75} : \left(-\frac{48}{25}\right)$; б) $-\frac{38}{75} : \left(-\frac{19}{100}\right)$; в) $-\frac{32}{77} : \left(-\frac{64}{55}\right)$;
 г) $-\frac{125}{196} : \frac{50}{52}$; д) $\frac{228}{245} : \left(-\frac{57}{125}\right)$; е) $-\frac{132}{1000} : \left(-\frac{143}{1000}\right)$.

538. а) $-\frac{1}{2} : 2$; б) $-\frac{1}{3} : 2$; в) $-\frac{2}{5} : (-3)$; г) $\frac{3}{7} : (-9)$;
 д) $-4 : \frac{1}{2}$; е) $(-3) : \left(-\frac{1}{2}\right)$; ж) $5 : \left(-\frac{3}{10}\right)$; з) $-8 : \frac{4}{5}$.

539. а) $48 : \left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $-55 : \left(-\frac{2}{5}\right)$; в) $-72 : \frac{36}{37}$;
 г) $\left(-\frac{16}{35}\right) : 64$; д) $-\frac{12}{13} : 24$; е) $\frac{15}{32} : (-20)$.

540. а) $-\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$; б) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$; в) $-\frac{3}{7} : \left(-\frac{4}{5}\right)$; г) $\frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right)$;
 д) $-\frac{15}{16} \cdot \left(-\frac{48}{25}\right)$; е) $-\frac{5}{3} : \frac{25}{27}$; ж) $-\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$; з) $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{4}{5}\right)$.

541. Найдите число x , для которого верно равенство:

а) $x \cdot \frac{3}{5} = -\frac{4}{15}$; б) $-\frac{2}{3} \cdot x = \frac{4}{7}$; в) $x : \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; г) $\frac{2}{7} : x = -\frac{22}{21}$.

542. Вычислите:

а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; б) $\left(\frac{3}{-4}\right)^2$; в) $\left(-\frac{1}{-10}\right)^3$; г) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$; д) $\left(-\frac{6}{7}\right)^2$;
 е) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; ж) $\left(-\frac{3}{10}\right)^4$; з) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; и) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$.

543. Положительным или отрицательным числом является степень отрицательной дроби:

а) с чётным показателем; б) с нечётным показателем?

Определите порядок действий, вычислите (**544–546**):

544. а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$; в) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

545. а) $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; б) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right)^2$;

в) $-\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{25}$; г) $\frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$.

546. а) $-\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{18}{25}\right) - \frac{14}{27} \cdot \left(-\frac{18}{35}\right)$; б) $-\frac{27}{20} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) - \frac{5}{24} \cdot \left(-\frac{22}{5}\right)$;

в) $\frac{21}{20} \cdot \left(-\frac{8}{21}\right) + \frac{7}{72} \cdot \left(-\frac{36}{5}\right)$; г) $-\frac{36}{60} \cdot \left(-\frac{5}{18}\right) - \left(-\frac{21}{56}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$.

3.6. Законы сложения и умножения

Для рациональных чисел a , b , c справедливы законы арифметических действий:

- 1) переместительный закон сложения: $a + b = b + a$;
- 2) сочетательный закон сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 3) переместительный закон умножения: $a \cdot b = b \cdot a$;
- 4) сочетательный закон умножения: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- 5) распределительный закон: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Доказательство любого из этих законов можно провести, опираясь на соответствующие законы для целых чисел. Докажем, например, распределительный закон.

○ **Доказательство.** Так как дроби a и b всегда можно привести к общему положительному знаменателю, то пусть

$$a = \frac{p}{q}, \quad b = \frac{r}{q}, \quad c = \frac{s}{t}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } (a + b) \cdot c &= \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q} \right) \cdot \frac{s}{t} = \frac{p+r}{q} \cdot \frac{s}{t} = \frac{(p+r) \cdot s}{q \cdot t} = \frac{p \cdot s + r \cdot s}{q \cdot t} = \\ &= \frac{p \cdot s}{q \cdot t} + \frac{r \cdot s}{q \cdot t} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{t} + \frac{r}{q} \cdot \frac{s}{t} = a \cdot c + b \cdot c. \quad \bullet \end{aligned}$$

Из законов арифметических действий следует, что все правила вычислений, сформулированные для целых чисел, справедливы и для рациональных чисел (правила раскрытия скобок и заключения в скобки, правила определения знака произведения и частного и т. п.).

Применение законов сложения и умножения иногда позволяет упростить вычисления. Например,

$$1) \frac{8}{15} - \left(\frac{7}{13} + \frac{8}{15} \right) = \frac{8}{15} - \frac{7}{13} - \frac{8}{15} = -\frac{7}{13} + \left(\frac{8}{15} - \frac{8}{15} \right) = -\frac{7}{13};$$

$$2) \frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{4}{9} \right) + \frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{5}{9} \right) = \frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{4}{9} + \left(-\frac{5}{9} \right) \right) = \frac{3}{11} \cdot (-1) = -\frac{3}{11}.$$

547. Для рациональных чисел a , b и c запишите и сформулируйте:

- переместительный закон сложения;
- сочетательный закон сложения;
- переместительный закон умножения;
- сочетательный закон умножения;
- распределительный закон.

Вычислите, применяя законы сложения и умножения (548–550):

- 548.**
- | | |
|---|--------------------------------------|
| а) $80 \cdot 359 \cdot (-125)$; | б) $457 + 985 - 57$; |
| в) $45 \cdot (-39) + 55 \cdot (-39)$; | г) $76 \cdot 45 - 26 \cdot 45$; |
| д) $157 \cdot (-13) - 17 \cdot (-13)$; | е) $(-124) \cdot 35 + 24 \cdot 35$. |

- 549.**
- | | |
|---|--|
| а) $\frac{4}{15} + \frac{5}{36} + \frac{11}{15} + \frac{31}{36}$; | б) $\frac{7}{25} + \frac{32}{33} - \frac{7}{25}$; |
| в) $\frac{39}{40} \cdot \frac{124}{125} : \frac{124}{125}$; | г) $\frac{4}{35} \cdot \frac{17}{18} + \frac{17}{18} \cdot \frac{31}{35}$; |
| д) $\frac{45}{46} \cdot \frac{49}{51} - \frac{45}{46} \cdot \frac{3}{51}$; | е) $\frac{72}{73} \cdot \frac{34}{65} + \frac{72}{73} \cdot \frac{39}{65}$. |

550. а) $\frac{23 \cdot 35 + 38 \cdot 35}{17 \cdot 61 + 18 \cdot 61}$;

в) $\frac{75 \cdot 27 + 75 \cdot 37}{37 \cdot 48 - 12 \cdot 48}$;

б) $\frac{49 \cdot 99 + 28 \cdot 99}{12 \cdot 154 + 21 \cdot 154}$;

г) $\frac{679 \cdot 846 + 679 \cdot 54}{679 \cdot 846 - 679 \cdot 46}$.

Вычислите (551–555):

551. а) $-\frac{7}{25} - \frac{11}{25} - \frac{2}{25}$;

в) $-\frac{19}{55} - \frac{18}{55} + \frac{4}{55}$;

б) $-\frac{1}{72} - \frac{7}{72} - \frac{18}{72}$;

г) $\frac{25}{64} - \frac{17}{64} - \frac{15}{64}$.

552. а) $-\frac{1}{5} + \frac{6}{25} - \frac{8}{25}$;

в) $-\frac{8}{49} - \frac{5}{7} - \frac{9}{49}$;

б) $-\frac{1}{7} + \frac{2}{21} - \frac{3}{7}$;

г) $\frac{7}{10} - \frac{4}{15} - \frac{11}{30}$.

553. а) $-\frac{33}{80} + \left(\frac{3}{16} - \frac{39}{80}\right)$;

г) $-\frac{5}{16} - \left(\frac{1}{16} - \frac{7}{8}\right)$;

ж) $\left(-\frac{2}{15} + \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{10}$;

б) $\frac{2}{45} + \left(-\frac{3}{45} + \frac{7}{9}\right)$;

д) $-\frac{1}{27} + \left(\frac{7}{9} - \frac{2}{3}\right)$;

з) $-\left(\frac{5}{8} - \frac{5}{12}\right) + \frac{1}{24}$.

в) $\frac{7}{15} - \left(\frac{4}{15} - \frac{1}{5}\right)$;

е) $\left(-\frac{2}{15} - \frac{4}{5}\right) + \frac{3}{10}$;

554. а) $\frac{3}{8} - \frac{2}{7} + \frac{5}{8} - \frac{5}{7}$;

в) $-\frac{12}{19} - \frac{15}{26} + \frac{3}{19} + \frac{9}{19}$;

б) $\frac{11}{14} - \frac{7}{10} - \frac{21}{100} - \frac{13}{14}$;

г) $\frac{2}{7} - \frac{5}{9} - \frac{4}{9} - \frac{4}{7}$.

555. а) $2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) \cdot (-3)$; в) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)$; г) $-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right)$.

556. Определите знак произведения:

а) $(-1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{13}\right)$;

в) $\left(-\frac{8}{9}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$;

б) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)$;

г) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{8}{7}\right)$.

557. Вычислите:

а) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}$;

б) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$.

558. Сколько отрицательных множителей может содержать произведение, чтобы оно было: а) положительным; б) отрицательным?

- 559.** а) Произведение пяти множителей — положительное число. Можно ли утверждать, что все множители — положительные числа?
 б) Произведение четырёх множителей — положительное число. Можно ли утверждать, что все множители — положительные числа?

Доказываем

560. Сформулируйте и докажите свойства деления рациональных чисел, которые выражаются следующими равенствами:

- а) $a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$; б) $a : b = (a : n) : (b : n)$;
 в) $(a + b) : n = a : n + b : n$, где $b \neq 0$ и $n \neq 0$.

Вычислите (**561–563**):

- 561.** а) $-\frac{3}{4} : \frac{5}{6} + \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{5} - 1 : \frac{1}{9}$; б) $2 : \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} : 2 - \frac{3}{2} : 6 + 6 : \frac{3}{2}$;
 в) $\frac{11}{4} : \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{25}{8}\right)$; г) $\left(\frac{2}{15} + \frac{19}{12}\right) \cdot \frac{30}{103} - \left(1 : \frac{9}{4}\right) \cdot \left(-\frac{9}{16}\right)$.
562. а) $\frac{8}{9} \cdot \frac{7}{24} - \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{24}$; б) $\frac{3}{25} \cdot \left(-\frac{5}{49}\right) + \frac{22}{25} \cdot \left(-\frac{5}{49}\right)$.
563. а) $-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$; б) $-\frac{10}{11} \cdot \left(-\frac{11}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \left(-\frac{13}{14}\right) \cdot \left(-\frac{14}{15}\right)$.

3.7. Смешанные дроби произвольного знака

Напомним, что для положительных неправильных дробей есть и другая форма записи: в виде смешанной дроби.

Например, $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$, $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$.

Если перед положительной смешанной дробью поставить знак «+», то получим то же самое число, так как не изменится равная ей обыкновенная неправильная дробь, если перед ней поставить знак «+».

Например, $+2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Если перед положительной смешанной дробью поставить знак «-», то получим противоположную ей отрицательную смешанную дробь.

Например, $-2\frac{1}{2}$ и $2\frac{1}{2}$ — противоположные числа.

Положительная смешанная дробь есть сумма натурального числа и правильной дроби. Поэтому, поставив знак « \leftarrow » перед смешанной дробью, мы ставим его перед суммой двух чисел.

Для упрощения записей скобки в выражениях вида $-\left(2\frac{1}{2}\right)$ не пишут, т. е. верно равенство $-\left(2\frac{1}{2}\right) = -2\frac{1}{2}$.

Рассмотрим **примеры** вычислений со смешанными дробями произвольных знаков:

$$1) -2\frac{1}{4} + \left(-1\frac{1}{4}\right) = -\left(2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4}\right) = -\left(3 + \frac{2}{4}\right) = -3\frac{1}{2};$$

$$2) 5\frac{1}{3} - 7\frac{2}{3} = -\left(7\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3}\right) = -\left(2\frac{1}{3}\right) = -2\frac{1}{3};$$

$$3) 1\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3} = -\left(5\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}\right) = -\left(5\frac{2}{6} - 1\frac{3}{6}\right) = -\left(4\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) = \\ = -\left(3 + \frac{8}{6} - \frac{3}{6}\right) = -\left(3 + \frac{5}{6}\right) = -3\frac{5}{6};$$

$$4) 1\frac{1}{5} \cdot \left(-3\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{15}{4}\right) = -\frac{\overset{3}{6} \cdot \overset{3}{15}}{\underset{1}{5} \cdot \underset{2}{4}} = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2};$$

$$5) -3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = -\left(\frac{7}{2} : \frac{21}{4}\right) = -\frac{\overset{1}{7} \cdot \overset{2}{4}}{\underset{1}{2} \cdot \underset{3}{21}} = -\frac{2}{3};$$

$$6) \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}.$$

564. Представьте отрицательную неправильную дробь в виде отрицательной смешанной дроби:

$$а) \frac{4}{3}; \quad б) \frac{13}{5}; \quad в) \frac{41}{15}; \quad г) \frac{45}{16}.$$

565. Запишите частное в виде обыкновенной или смешанной дроби:
а) $-17 : (-18)$; б) $13 : (-25)$; в) $-19 : (-5)$; г) $29 : (-15)$.

566. Сравните числа:

$$а) -\frac{1}{2} \text{ и } -1\frac{1}{2}; \quad б) -\frac{3}{2} \text{ и } -1\frac{1}{4}; \\ в) -1\frac{1}{5} \text{ и } -1\frac{1}{6}; \quad г) -\frac{12}{11} \text{ и } -1\frac{1}{13}.$$

Вычислите (567–571):

567. а) $-3\frac{2}{5} + \left(-1\frac{1}{5}\right)$; б) $-7\frac{1}{3} + \left(-2\frac{2}{3}\right)$; в) $-12\frac{5}{7} + \left(-4\frac{4}{7}\right)$;

г) $-3\frac{8}{19} + \left(-1\frac{11}{19}\right)$; д) $-4\frac{2}{3} + \left(-1\frac{1}{3}\right)$; е) $\left(-8\frac{2}{3}\right) + \left(-9\frac{2}{3}\right)$.

568. а) $18\frac{5}{9} + \left(-22\frac{2}{9}\right)$; б) $25\frac{3}{4} + \left(-51\frac{1}{4}\right)$; в) $-6\frac{2}{9} + 1\frac{2}{3}$;

г) $7\frac{1}{12} + \left(-8\frac{3}{4}\right)$; д) $18\frac{5}{6} + \left(-7\frac{1}{2}\right)$; е) $2\frac{1}{5} + \left(-\frac{4}{15}\right)$.

569. а) $-3 - 2\frac{1}{5}$; б) $-8 + \frac{2}{13}$; в) $-7\frac{1}{3} - 4$; г) $\frac{4}{17} - 15$.

570. а) $1\frac{1}{3} - 3\frac{2}{3}$; б) $7\frac{2}{5} - \left(-1\frac{1}{5}\right)$; в) $-6\frac{3}{7} + 1\frac{2}{7}$;

г) $7\frac{2}{9} - 9\frac{8}{9}$; д) $4\frac{1}{2} - 8\frac{1}{3}$; е) $6\frac{9}{10} - 12\frac{1}{100}$;

ж) $-4\frac{2}{5} - 1\frac{1}{2}$; з) $-5\frac{1}{3} - 8\frac{2}{9}$; и) $-2\frac{1}{5} - 14\frac{1}{10}$.

571. а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - 2\frac{1}{3}$; б) $\frac{7}{9} - \frac{2}{3} - 3\frac{1}{6} - 1$.

572. Вычислите по образцу:

а) $-4\frac{1}{2} + 5\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = -4\frac{1}{2} + \left(5\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) = -4\frac{1}{2} + 6 = 6 - 4\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$;

б) $-1\frac{1}{3} + 8\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; в) $3\frac{2}{5} - 7\frac{1}{2} + 2\frac{3}{5}$;

г) $\frac{-5}{9} + 2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3}$; д) $\frac{7}{15} - 2 - \frac{1}{5}$.

573. Упростите выражение, раскрывая скобки по образцу:

а) $7\frac{1}{2} + \left(3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2}\right) = 7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 5 + 3\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}$;

б) $8\frac{3}{5} - \left(7\frac{1}{3} - 11\frac{2}{5}\right) = 8\frac{3}{5} - 7\frac{1}{3} + 11\frac{2}{5} = 20 - 7\frac{1}{3} = 12\frac{2}{3}$;

в) $\frac{5}{12} + \left(1\frac{1}{2} - \frac{5}{12}\right)$; г) $2 - \left(\frac{2}{5} - 7\frac{1}{2}\right)$;

д) $4\frac{2}{7} - \left(7\frac{1}{2} + 4\frac{2}{7}\right)$; е) $9\frac{7}{9} - \left(2\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\right)$.

Вычислите (574–577):

574. а) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{-75}$; б) $1\frac{1}{3} \cdot \frac{-9}{16}$; в) $3\frac{1}{3} \cdot \frac{-7}{-100}$;
г) $\frac{-5}{9} \cdot 4\frac{1}{2}$; д) $-\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{4}$; е) $3\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{24}{39}\right)$;
ж) $-\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{5}$; з) $2\frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{14}{15}\right)$; и) $3\frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{5}{11}\right)$.

575. а) $-\frac{1}{3} \cdot (-1)$; б) $-1 \cdot \frac{3}{5}$; в) $-1 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)$; г) $-3\frac{1}{5} \cdot (-1)$;
д) $-2 \cdot \frac{3}{4}$; е) $-1\frac{1}{2} \cdot (-4)$; ж) $-5 \cdot \frac{-3}{10}$; з) $-9 \cdot \left(-1\frac{1}{6}\right)$.

576. а) $\left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{9}{10}$; б) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot 3\frac{1}{2}$; в) $\left(-5\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{32}{33}\right)$; г) $4\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{24}{25}\right)$.

577. а) $(-5) \cdot \frac{2}{3}$; б) $7 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)$; в) $(-3) \cdot \left(-1\frac{1}{4}\right)$;
г) $\left(-2\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{7}\right)$; д) $\left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot 2\frac{2}{5}$; е) $4\frac{1}{2} \cdot \left(-5\frac{1}{3}\right)$.

578. Вычислите, предварительно указав порядок действий:

а) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 2\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(5\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right) \cdot \frac{7}{9}$;
в) $\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{9}{2} \cdot \left(-1\frac{1}{5}\right)\right) \cdot (-2)$; г) $\left(3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5}\right)$.

579. Вычислите:

а) $2\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{9}{7}$; б) $\left(-\frac{8}{9}\right) \cdot 2\frac{4}{17} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right)$;
в) $2\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(2\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)\right)$;
д) $5\frac{7}{9} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right)$; е) $4\frac{1}{5} \cdot \left(3\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)\right)$.

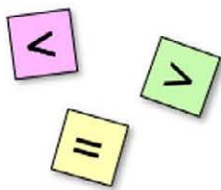
Доказываем

580. Докажите, что:

а) $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \frac{8}{9} \cdot 1\frac{3}{4} > \frac{2}{-3} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$; б) $\left(\frac{7}{12} - \frac{7}{18}\right) \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) < \left(-\frac{25}{36}\right) \cdot \frac{5}{-12} \cdot \frac{-1}{11}$.

581. Не проводя вычислений, сравните результат с нулём, а затем вычислите:

а) $5\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$; б) $\frac{-3}{7} \cdot 2\frac{1}{3}$;
в) $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{-8}{5}$; г) $\frac{-8}{-9} \cdot \frac{-3}{-7} \cdot \frac{-7}{-8}$;
д) $\left(-\frac{1}{2}\right) : (-7) : (-3)$; е) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$.



582. Определите без вычислений, значение какого выражения больше:

а) $4\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{19}\right)$ или $5\frac{7}{9} : \left(-\frac{4}{17}\right) : \frac{8}{13}$;
б) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$ или $\left(-\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{1}{3}$;
в) $\left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-2\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-3\frac{3}{5}\right)$ или $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{100}\right)$.

583. Вычислите степень, предварительно указав основание и показатель степени:

а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; в) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$; г) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$.

584. Сравните с нулём, затем вычислите:

а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; г) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$.

Вычислите (585–588):

585. а) $3\frac{2}{3} : \frac{-11}{12}$; б) $\frac{8}{15} : \frac{16}{-25}$; в) $\frac{-7}{9} : 2\frac{1}{3}$;
г) $\frac{-9}{-16} : 1\frac{13}{32}$; д) $-1\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$; е) $\frac{7}{8} : \left(-1\frac{5}{8}\right)$;
ж) $-\frac{4}{5} : \left(-1\frac{1}{5}\right)$; з) $-\frac{4}{3} : \left(-1\frac{5}{6}\right)$; и) $4 : \left(-1\frac{1}{3}\right)$;
к) $\left(-2\frac{2}{5}\right) : 10$; л) $-6 : 3\frac{3}{5}$; м) $-2\frac{5}{7} : (-38)$.

586. а) $1\frac{1}{2} : \left(-1\frac{1}{6}\right)$; б) $-2\frac{1}{3} : \left(-1\frac{5}{6}\right)$; в) $-1\frac{1}{3} : 2\frac{7}{8}$;
г) $-2\frac{1}{8} : \left(-3\frac{1}{16}\right)$; д) $1\frac{13}{15} : \left(-1\frac{2}{5}\right)$; е) $\left(-2\frac{2}{21}\right) : \left(-1\frac{4}{7}\right)$.

587. а) $7\frac{2}{9} \cdot 8\frac{2}{3} - 7\frac{2}{9} \cdot 6\frac{2}{3}$;

в) $7\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{5} + 7\frac{1}{3} \cdot 1\frac{4}{5}$;

д) $2\frac{6}{7} \cdot 4\frac{2}{5} - 2\frac{6}{7} \cdot 4$;

б) $12\frac{35}{44} \cdot 4\frac{1}{10} - 8\frac{35}{44} \cdot 4\frac{1}{10}$;

г) $\left(-3\frac{1}{9}\right) \cdot 7\frac{4}{7} + \left(-3\frac{1}{9}\right) \cdot \left(-2\frac{3}{7}\right)$;

е) $\left(-2\frac{3}{7}\right) \cdot (-5) + 2\frac{3}{7} \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)$.

588. а) $7\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-1\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{9}{10}\right) - 17\frac{29}{30}$;

б) $\left(-2\frac{13}{25}\right) : \left(-2\frac{7}{10}\right) - 17\frac{25}{47} : \left(-17\frac{25}{47}\right) - 4\frac{3}{5}$.

3.8. Изображение рациональных чисел на координатной оси

На координатной оси можно изобразить не только целые, но и рациональные числа. Например, числу $\frac{1}{2}$ соответствует точка положительной координатной полуоси, находящаяся от точки 0 на расстоянии $\frac{1}{2}$ единичного отрезка. А числу $-\frac{1}{2}$ соответствует точка отрицательной координатной полуоси, находящаяся от точки 0 на расстоянии $\frac{1}{2}$ единичного отрезка (рис. 56).

Рациональному числу $\frac{p}{q}$ на координатной оси соответствует точка, находящаяся на расстоянии $\left|\frac{p}{q}\right|$ от точки 0 на положительной полуоси, если $\frac{p}{q} > 0$, и на отрицательной полуоси, если $\frac{p}{q} < 0$.

Эту точку называют точкой $\frac{p}{q}$ или точкой с координатой $\frac{p}{q}$.

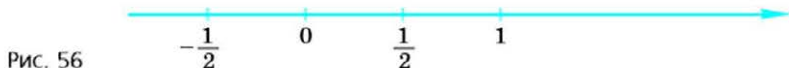


Рис. 56

Пример 1. Изобразим на координатной оси число $-\frac{2}{5}$.

Так как $-\frac{2}{5} < 0$ и $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$, то точка с координатой $-\frac{2}{5}$ находится на отрицательной полуоси, на расстоянии $\frac{2}{5}$ единичного отрезка от точки 0 (рис. 57).



Рис. 57

Пример 2. Изобразим на координатной оси число $\frac{5}{2}$, или, что то же самое, число $2\frac{1}{2}$.

Так как $\frac{5}{2} > 0$ и $\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$, то точка с координатой $\frac{5}{2}$ находится на положительной полуоси на расстоянии $\frac{5}{2}$ единичного отрезка от точки 0 (рис. 58).

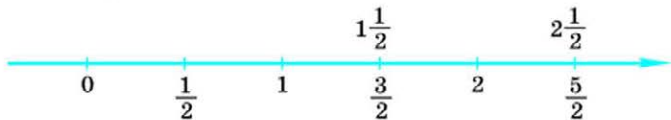


Рис. 58

Пример 3. Изобразим на координатной оси число $-\frac{5}{4}$, или, что то же самое, число $-1\frac{1}{4}$.

Так как $-\frac{5}{4} < 0$ и $\left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}$, то точка с координатой $-\frac{5}{4}$ находится на отрицательной полуоси на расстоянии $\frac{5}{4}$ единичного отрезка от точки 0 (рис. 59).

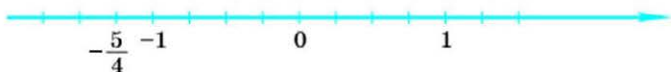


Рис. 59

Точки, изображающие рациональные числа на координатной оси, называют рациональными точками или точками с рациональными координатами.

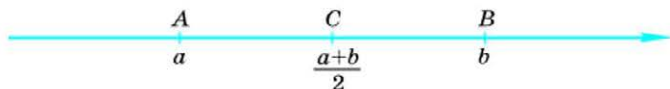


Рис. 60

Если a и b — рациональные числа и $a < b$, то:

1) точка b находится на координатной оси правее точки a ;

2) расстояние между точками a и b равно $b - a$;

3) точка $\frac{a+b}{2}$ есть середина отрезка, соединяющего точки a и b

(рис. 60).

В самом деле, чтобы вычислить координату точки C — середины отрезка AB , надо к числу a прибавить половину длины отрезка AB :

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Например, пусть даны точки $A\left(-\frac{2}{5}\right)$ и $B\left(\frac{4}{5}\right)$. Тогда:

1) $-\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$, значит, точка B находится правее точки A на координатной оси;

$$2) AB = \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5};$$

3) середина отрезка AB имеет координату:

$$\frac{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}}{2} = \left(-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right) : 2 = \frac{2}{5} : 2 = \frac{2}{5 \cdot 2} = \frac{1}{5}.$$

Так как для любых рациональных чисел a и b число $\frac{a+b}{2}$ тоже рациональное, то между любыми рациональными точками на оси существует ещё хотя бы одна рациональная точка.

Число $\frac{a+b}{2}$ называют **средним арифметическим** чисел a и b .

Например, среднее арифметическое чисел -5 и 7 равно: $\frac{-5+7}{2} = 1$.

Средним арифметическим нескольких чисел называют частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Например, среднее арифметическое чисел $1, 3, 7$ равно:

$$\frac{1+3+7}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3},$$

а среднее арифметическое чисел $-3, 5, -7, 9$ равно: $\frac{-3+5-7+9}{4} = 1$.

589. Где на координатной оси расположены точки, изображающие:
а) положительные дроби; б) отрицательные дроби?

590. Если a и b — рациональные числа и $a < b$, то:
а) как расположены на координатной оси точки a и b ;
б) как найти расстояние между точками a и b координатной оси;
в) как найти координату середины отрезка между точками a и b координатной оси?

591. Что называют средним арифметическим нескольких чисел? Приведите пример.

592. Изобразите на координатной оси с единичным отрезком 8 см точки:

$$0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \frac{11}{8}, \frac{12}{8}.$$

593. Изобразите на координатной оси точки:

$$0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, \frac{12}{6}.$$

Какой единичный отрезок удобно взять?

594. Выберите удобный единичный отрезок и отметьте на координатной оси точки:

а) $0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; б) $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}$.

595. Изобразите на координатной оси точки $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $B(2)$, $C\left(2\frac{3}{4}\right)$.

Найдите длины отрезков AB , BC , AC .

596. Изобразите на координатной оси с единичным отрезком 4 см точки:

а) $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, 1\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}$;

б) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}$.

597. Выберите удобный единичный отрезок и изобразите на координатной оси точки:

а) $-1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3}, -1\frac{2}{3}, -2\frac{1}{3}, -2\frac{2}{3}$.

598. На координатной оси отметьте точку:

а) $A\left(-2\frac{1}{4}\right)$; б) $B\left(-1\frac{1}{5}\right)$; в) $C\left(-3\frac{1}{2}\right)$; г) $D\left(-4\frac{1}{2}\right)$.

599. Найдите координату середины отрезка, соединяющего точки:
а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$; в) $2\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{8}$; г) $3\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{4}$.

600. Даны точки $A(2)$ и $B(2\frac{1}{2})$. Найдите координату точки C — середины отрезка AB , координату точки D — середины отрезка CB , координату точки E — середины отрезка CD . Изобразите эти точки на координатной оси.

***601.** Найдите координату точки B по координатам точки A и точки C — середины отрезка AB , если:

а) $A(2)$, $C(5)$; б) $A(\frac{1}{2})$, $C(3)$; в) $A(\frac{1}{4})$, $C(\frac{2}{3})$.

***602.** Найдите координаты точек, делящих отрезок AB на три равные части, если:

а) $A(5)$, $B(9\frac{1}{2})$; б) $A(\frac{1}{3})$, $B(\frac{2}{9})$; в) $A(\frac{1}{2})$, $B(3\frac{1}{6})$.

603. Определите расстояние между точками:

а) $A(-3\frac{1}{2})$ и $B(2)$; б) $A(-4)$ и $B(-2\frac{1}{2})$;

в) $A(-3\frac{1}{4})$ и $B(-4\frac{1}{8})$; г) $A(-4\frac{7}{8})$ и $B(-6\frac{1}{2})$.

Найдите среднее арифметическое чисел (**604–606**):

604. а) 4 и 6; б) $\frac{1}{2}$ и 3; в) $\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{8}$; г) $2\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$.

605. а) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{4}$ и $-\frac{3}{5}$; в) -16 и -8 ; г) -16 и 8 .

606. а) 1, 3, 4; б) -5 , 8, 13; в) 10, 12, 14, 16;
г) -19 , -9 , 1, 11; д) -2 , 0, 2, 5, 10; е) -2 , -1 , 0, 1, 2.

607. Определите координату середины отрезка AB , если:

а) $A(-4)$, $B(-1)$; б) $A(-8)$, $B(3)$;
в) $A(-\frac{7}{10})$, $B(-\frac{1}{10})$; г) $A(-\frac{1}{3})$, $B(\frac{1}{6})$.

608. Точка C — середина отрезка AB . Определите координату точки B , если:

а) $A(-2)$, $C(1)$; б) $A(-5)$, $C(-1)$;
в) $A(-\frac{3}{10})$, $C(\frac{9}{10})$; г) $A(0)$, $C(\frac{12}{13})$.



609. На координатном луче отмечены числа. С помощью циркуля отметьте на координатном луче число:

- а) $a + 2$ (рис. 61, а); б) $a + 4$ (рис. 61, б).

610. Для чисел a и b выполняется равенство $5 - a = b$. С помощью циркуля отметьте на координатном луче число $a + b$ (рис. 62).



611. Для чисел a и b выполняется равенство $a - 3 = b$. С помощью циркуля отметьте на координатном луче число a (рис. 63).



612. На координатной оси отмечены точки с координатами: 0, 1, b (рис. 64). С помощью циркуля постройте точки с координатами: -1 , $-b$, $b + 1$, $b - 1$, $1 - b$, $-b - 1$.



613. На координатной оси отмечены точки с координатами: 0, a , b . С помощью циркуля постройте точки с координатами: $-a$, $-b$, $a + b$, $a - b$, $b - a$, $-a - b$ (рис. 65).



614. На рисунке 66 указаны координаты точек A и B . Найдите координату точки C .

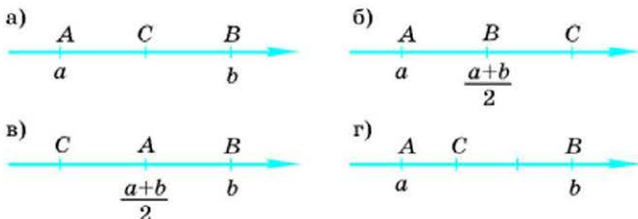


Рис. 66

615. Определите координаты точек, делящих отрезок AB на четыре равные части, если:

а) $A\left(2\frac{2}{8}\right)$, $B(4)$; б) $A\left(-\frac{5}{7}\right)$, $B\left(\frac{1}{7}\right)$.

616. а) Среднее арифметическое чисел $4\frac{1}{3}$ и a равно $2\frac{1}{2}$. Найдите число a .

б) Среднее арифметическое чисел a и $-\frac{1}{3}$ равно $\frac{5}{6}$. Найдите число a .

***617.** Отрезок, соединяющий точки 0 и 1 на координатной оси, разделили пополам — получили два отрезка. Правый отрезок разделили пополам — получили ещё два отрезка. Правый из них разделили пополам и т. д. Запишите координаты пяти первых полученных таким образом точек. Определите без вычислений координаты следующих пяти таких точек.

3.9. Уравнения

Если известно, что сумма числа, обозначенного буквой x , и числа 5 равна 8 и требуется определить, какое число обозначено буквой x , то говорят, что надо **решить уравнение** $x + 5 = 8$.

Корнем уравнения называют такое число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни.

Пример 1. Решим уравнение $x + 5 = 8$.

Решение. В левой части уравнения записано число $x + 5$, а в правой равно ему число 8. Равенство не изменится, если правую и левую его части уменьшить на 5:

$$x + 5 = 8,$$

$$x + 5 - 5 = 8 - 5,$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

Обычно в таком случае говорят, что число 5 перенесли в правую часть уравнения с противоположным знаком.

Пример 2. Решим уравнение $x - 2 = 5$.

Решение. Перенесём число (-2) в правую часть уравнения с противоположным знаком:

$$x = 5 + 2,$$

$$x = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 3. Решим уравнение $3x = 4$.

Решение. Произведение чисел 3 и x равно 4, равенство не изменится, если правую и левую его части разделить на 3:

$$x = 4 : 3,$$

$$x = 1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

Обычно в таком случае говорят, что обе части уравнения разделили на 3 (или умножили на $\frac{1}{3}$).

Пример 4. Решим уравнение $3 - \frac{1}{2}x = 5$.

Решение. 1) Перенесём число 3 в правую часть уравнения с противоположным знаком.

$$-\frac{1}{2}x = 5 - 3,$$

$$-\frac{1}{2}x = 2.$$

2) Найдём неизвестное число x , разделив обе части уравнения на $\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$x = 2 : \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$x = -4.$$

Ответ: -4 .

Пример 5. Решим уравнение $5x = 3x - 6$.

Решение. Равенство чисел $5x$ и $3x - 6$ не изменится, если из обеих частей равенства вычесть по числу $3x$:

$$5x - 3x = -6.$$

Применяя распределительный закон, получим

$$(5 - 3)x = -6,$$

или

$$2x = -6.$$

Найдём неизвестное число x , разделив обе части этого уравнения на 2:

$$x = -6 : 2,$$

$$x = -3.$$

Ответ: -3 .

618. Является ли число 2 корнем уравнения:

- а) $x - 2 = 0$; б) $x + 4 = 0$; в) $2x = 4$;
г) $3x - 4 = x$; д) $x + 3 = 2x + 1$; е) $3x + 4 = 6x - 2$?

Решите уравнение (619–629):

619. а) $x - 2 = 0$; б) $x + 4 = 0$; в) $100 + x = 0$; г) $x - 5 = 6$;
д) $x + 2 = 5$; е) $x - 11 = -7$; ж) $12 + x = 17$; з) $x + 7 = 7$.

620. а) $5 + x = 3$; б) $-7 + x = -2$; в) $x + 3 = -6$;
г) $12 + x = -8$; д) $x + 18 = 18$; е) $-13 + x = -5$;
ж) $x - \frac{1}{5} = 2$; з) $x - 2 = \frac{1}{2}$; и) $x - 4 = 1\frac{1}{3}$.

621. а) $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; б) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$; в) $x - \frac{1}{18} = \frac{1}{12}$;
г) $x - 1 = -\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{7} + x = 11$; е) $1\frac{1}{5} + x = 1$;
ж) $x - 6\frac{1}{3} = -3\frac{2}{3}$; з) $\frac{7}{9} + x = 2\frac{1}{2}$; и) $x - 2\frac{1}{2} = -1\frac{3}{5}$.

622. а) $2x = 4$; б) $6x = 24$; в) $7x = -14$;
г) $-5x = 100$; д) $-2x = -8$; е) $12x = -36$.

623. а) $3x = 2$; б) $6x = -7$; в) $-2x = -13$; г) $2x = 0$;
д) $-5x = 0$; е) $-x = 2$; ж) $-x = 0$; з) $-x = -5$.

624. а) $2x = \frac{1}{2}$; б) $3x = -\frac{1}{4}$; в) $-2x = \frac{1}{4}$;
г) $\frac{1}{2}x = 3$; д) $\frac{3}{4}x = 1$; е) $-\frac{1}{3}x = -3$;
ж) $-\frac{2}{7}x = 0$; з) $-4x = \frac{8}{25}$; и) $2x = 1\frac{1}{3}$.

625. а) $2x - 6 = 0$; б) $12 + 3x = 0$; в) $-x + 7 = 0$; г) $15 - 3x = 0$;
д) $3x + 1 = 7$; е) $5 - 2x = 1$; ж) $5x - 2 = 1$; з) $-5x - 2 = -12$.

626. а) $3x + 2x = 10$; б) $5x + x = 6$; в) $4x + 2x - 7 = 5$;
г) $7x + x + 3 = 19$; д) $5 = 4x - 3x$; е) $8 = 3x - x$;
ж) $3x - 1 = 2x$; з) $3x - 6 = x$.

627. а) $x + 3 = 3x - 7$; б) $3 - x = 1 + x$; в) $7x + 2 = 3x - 10$;
г) $5x - 8 = 3x - 8$; д) $\frac{1}{2}x - 3 = 2 - \frac{1}{3}x$; е) $5x - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}x$;
ж) $\frac{2}{5}x - 1 = \frac{3}{4}x - 6$; з) $2x - \frac{3}{5} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

628. а) $2(x - 5) = 9$; б) $12 + 3(x - 1) = 0$; в) $-(x + 8) = 3$;
г) $1 - 5(2 - 3x) = 6$; д) $7 - 3(x + 1) = 6$; е) $5 - 2(3 - x) = 11$;
ж) $2x - (7 + x) = 2$; з) $-3 - 3(3 - 2x) = 1$.

- 629.** а) $3(x+2) - x = 10$; б) $8 = 3(x-4) - x$;
 в) $4x + 3(x-7) = 5$; г) $3(x-1) + x = 2x$;
 д) $5 - x = 4(x-3)$; е) $5(x+4) + x = 6$;
 ж) $7 - (2x+3) = 9$; з) $3(x-7) - 6x = -x$;
 и) $\frac{1}{2}(x-4) + 3x = 5$; к) $2\left(x + \frac{3}{5}\right) - x = 3\frac{1}{5}$;
 л) $5x - \left(\frac{1}{2}x + 9\right) = 18$; м) $-2\left(\frac{1}{3}x + 7\right) = -21$.

3.10. Решение задач с помощью уравнений

С помощью уравнений можно решать многие задачи. Для этого нужно:

- 1) неизвестную величину обозначить буквой;
- 2) используя условия задачи, составить уравнение;
- 3) решить составленное уравнение;
- 4) ответить на вопрос задачи.

Задача 1. Ученик задумал число, увеличил его в 2 раза, прибавил 3 и получил 7. Какое число он задумал?

Решение. Пусть ученик задумал число x , увеличил его в 2 раза и получил $2x$, прибавил 3 и получил $2x + 3$, что по условию задачи равно 7. Составим уравнение и решим его:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 7, \\ 2x &= 7 - 3, \\ 2x &= 4, \\ x &= 4 : 2, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Ответ: ученик задумал число 2.

Задача 2. В классе 37 учащихся, причём мальчиков на 5 больше, чем девочек. Сколько девочек в классе?

Решение. Пусть в классе x девочек, тогда мальчиков $(x + 5)$. Всего в классе 37 учащихся. Составим уравнение и решим его:

$$\begin{aligned} x + (x + 5) &= 37, \\ 2x + 5 &= 37, \\ 2x &= 37 - 5, \\ 2x &= 32, \\ x &= 32 : 2, \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Ответ: в классе 16 девочек.

Задача 3. У брата и сестры было поровну денег. Брат купил 3 одинаковые ручки, и у него осталось 30 к. Сестра купила 2 такие же ручки, и у неё осталось 1 р. 80 к. Сколько стоит ручка?

Решение. Пусть ручка стоит x к. Тогда у брата было $(3x + 30)$ к., а у сестры было $(2x + 180)$ к. По условию задачи денег у них было поровну. Составим уравнение и решим его:

$$\begin{aligned}3x + 30 &= 2x + 180, \\3x - 2x &= 180 - 30, \\x &= 150.\end{aligned}$$

Ответ: ручка стоит 1 р. 50 к.

Задача 4. Найдите число, $\frac{4}{5}$ которого равны 12.

Решение. Обозначим неизвестное число через x . Тогда $\frac{4}{5}$ этого числа равны $\frac{4}{5}x$, или 12. Составим уравнение и решим его:

$$\begin{aligned}\frac{4}{5}x &= 12, \\x &= 12 : \frac{4}{5}, \\x &= 15.\end{aligned}$$

Ответ: 15 — неизвестное число.

Обозначьте одну из неизвестных величин через x и выразите через x ответ на вопрос задачи (630—633):

- 630.** а) Когда Маша прочитала несколько страниц книги, то ей осталось прочитать на 40 страниц больше, чем она уже прочитала. Сколько страниц в книге?
б) Когда было пройдено несколько километров, то осталось пройти на 10 км меньше, чем уже пройдено. Определите всё расстояние.
в) В многоэтажном доме двухкомнатных квартир в 3 раза больше, чем однокомнатных. Сколько всего в этом доме двухкомнатных и однокомнатных квартир?
г) В некотором посёлке имеются только одноэтажные и двухэтажные дома, причём двухэтажных домов в 10 раз меньше, чем одноэтажных. Сколько всего домов в этом посёлке?

- 631.** В вазе лежало 15 яблок. Даша угостила трёх подруг, дав всем яблок поровну. Сколько яблок осталось в вазе?



- 632.** а) Папа в 3 раза старше сына. На сколько лет сын моложе папы?
б) Дочь в 4 раза младше мамы. На сколько лет мама старше своей дочери?
в) Папа на 28 лет старше сына. Во сколько раз он старше сына?
г) Мама на 24 года старше дочери. Во сколько раз она старше дочери?

- 633.** а) Ученик задумал число, увеличил его в 3 раза и уменьшил результат на 5. Какое число он получил?
б) Ученик задумал число, уменьшил его на 3 и увеличил результат в 5 раз. Какое число он получил?

- 634.** Обозначьте неизвестное число буквой и составьте уравнение по условию задачи:
а) Задумали число, прибавили к нему 8 и получили 33.
б) Задумали число, умножили его на 4 и получили 52.
в) Задумали число, умножили его на 7, к произведению прибавили 12 и получили 26.
г) Задумали число, вычли из него 4, умножили разность на 5 и получили 35.

- 635.** Одно число на 6 больше другого, а их сумма равна 18. Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой:
а) меньшее число; б) большее число.

- 636.** Одно число на 4 меньше другого, а их сумма равна 22. Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой:
а) меньшее число; б) большее число.

Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой неизвестное число, и решите его (**637—652**):

- 637.** а) Одно число в 5 раз больше другого, а их сумма равна 42.
б) Одно число в 3 раза меньше другого, а их сумма равна 28.
в) Одно число в 4 раза больше другого, а их разность равна 39.
г) Одно число в 7 раз меньше другого, а их разность равна 54.

- 638.** а) Брат нашёл в 3 раза больше белых грибов, чем сестра. Всего они нашли 24 белых гриба. Сколько белых грибов нашёл брат и сколько сестра?
б) На двух полках 63 книги, причём на одной в 2 раза меньше книг, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?



- 639.** а) В книжке 60 страниц. Прочитали в 2 раза больше страниц, чем осталось прочитать. Сколько страниц осталось прочитать?
 б) На автомобильной стоянке стоит 72 автомобиля, причём легковых автомобилей в 7 раз больше, чем грузовых. Сколько грузовых автомобилей на автостоянке?
- 640.** а) У хозяйки было 20 кур и цыплят. Кур было в 4 раза меньше, чем цыплят. Сколько цыплят было у хозяйки?
 б) У хозяйки было 16 уток и утят. Уток было в 3 раза меньше, чем утят. Сколько утят было у хозяйки?
- 641.** а) Кусок полотна в 124 м надо разрезать на две части так, чтобы длина одной части была на 12 м больше, чем другой. По сколько метров полотна будет в каждой части?
 б) Кусок лески длиной 16 м надо разрезать на две части так, чтобы длина одной части была на 1 м больше, чем другой. По сколько метров лески будет в каждой части?
- 642.** а) В школу привезли 690 столов и стульев. Стульев было на 230 больше, чем столов. Сколько столов и стульев в отдельности привезли в школу?
 б) В соревнованиях по лыжам участвовали 53 человека. Девочек было на 17 меньше, чем мальчиков. Сколько мальчиков и девочек в отдельности участвовало в соревнованиях?
- 643.** Двое должны поделить между собой 15 р. так, чтобы одному досталось на 4 р. больше, чем другому. Сколько достанется каждому?
- 644.** а) За конфеты заплатили в 3 раза больше, или на 6 р. больше, чем за печенье. Сколько заплатили за печенье?
 б) За тетради заплатили в 4 раза больше, или на 7 р. 20 к. больше, чем за линейки. Сколько заплатили за линейки?
- 645.** а) Папа в 8 раз старше дочери, а дочь на 28 лет младше папы. Сколько лет папе?
 б) Мама в 6 раз старше сына, а сын на 25 лет младше мамы. Сколько лет маме?
- 646.** На солнышке грелись несколько кошек. У них вместе лап на 10 больше, чем ушей. Сколько кошек грелось на солнышке?
- 647.** Десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, а каждой кошке — 5 галет. Сколько было собак и сколько кошек?



648. В хозяйстве имеются куры и овцы. Сколько тех и других, если известно, что у них всех вместе:

- а) 19 голов и 46 ног; б) 30 голов и 74 ноги?

649. У пятнадцати треугольников и четырёхугольников 53 угла. Сколько треугольников и четырёхугольников в отдельности?

650. а) Сумму в 74 р. заплатили девятнадцатью монетами по 2 р. и 5 р. Сколько было монет по 2 р.?

б) Если разменять 27 рублей на гривенники и двугривенные¹ так, чтобы всех монет было 170, то сколько будет гривенников и сколько двугривенных?

651. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Спросил некто учителя:

— Сколько имеешь учеников у себя в учении, ибо хочу отдать тебе в учение своего сына?

Учитель же отвечал ему:

— Если придёт ко мне ещё столько, сколько имею, да ещё половина и ещё четверть и ещё твой сын, то будет у меня 100 учеников.

Сколько учеников было у учителя?

652. (Греция.)

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть ещё три женщины.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1 БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Если в числовом выражении некоторые (или все) числа заменить буквами (разные числа — разными буквами), то получится **буквенное выражение**. Например, если в числовом выражении $2 + 3$ заменить число 2 на букву a , число 3 на букву b , то получится буквенное выражение $a + b$.

Мы уже пользовались буквенными выражениями. Например, произвольные натуральные числа мы обозначали буквами a, b, \dots , произвольное рациональное число мы обозначали $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа ($q \neq 0$).

¹ Гривенник и двугривенный — старинные названия монет в 10 и 20 к.

Если в буквенном выражении $3 \cdot a - 7$ вместо a подставить число, например 3, то получится числовое выражение $3 \cdot 3 - 7$, равное числу 2. Это число называют значением буквенного выражения $3 \cdot a - 7$ при $a = 3$.

Пример 1. Найдём значение буквенного выражения $7 \cdot x + 2 \cdot x$ при $x = -2$.

Решение. $7 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = -14 - 4 = -18$.

В буквенных выражениях обычно не пишут знак умножения (\cdot) между числами и буквами. Считают, например, что $8 \cdot y = 8y$.

Буквенные выражения применяют для записи **формул**. Формула — это запись математических и других законов с помощью буквенных выражений. Например:

1) $P = 2(a + b)$ — формула периметра прямоугольника, где a и b — стороны прямоугольника;

2) $S = ab$ — формула площади прямоугольника, где a и b — стороны прямоугольника;

3) $V = abc$ — формула объёма прямоугольного параллелепипеда, где a , b и c — его длина, ширина и высота;

4) $s = vt$ — формула пути равномерного движения по прямой, где v — скорость, t — время движения;

5) $P = 4a$ — формула периметра квадрата, где a — сторона квадрата;

6) $S = a^2$ — формула площади квадрата, где a — сторона квадрата.

653. Замените число 5 буквой a в числовом выражении:

а) $7 \cdot 5 - 1$; б) $2 \cdot 5 - 5 : 3$.

Запишите полученное буквенное выражение.

654. Приведите примеры буквенных выражений.

655. Подставьте вместо буквы a в буквенное выражение $a + 3$ число:

а) 5; б) 3; в) 1; г) 0; д) -1; е) -3.

656. Найдите значение буквенного выражения $7 + x$ при x , равном:

а) 0; б) 3; в) -1; г) -4; д) -7; е) -10.

657. Выражение $a + 2$ — это сумма a и 2, выражение $3 - x$ — это разность 3 и x . Прочитайте буквенные выражения:

а) $5 + a$; б) $7 - a$; в) $4 - x$; г) $a + 12$;
д) $2a$; е) $7b$; ж) $-3a$; з) $a + (-3)$.

658. Вычислите значение буквенного выражения по образцу:

а) $10 - 4x$ при $x = -5$.

Решение. При $x = -5$ $10 - 4x = 10 - 4 \cdot (-5) = 10 + 20 = 30$.

б) $2x + 1$ при $x = 5$;

в) $6 + 8x$ при $x = -1$;

г) $5 - 4a$ при $a = 2$;

д) $3 - 7b$ при $b = -2$.

Найдите значение буквенного выражения (659–660):

- 659.** а) $a + b$ при $a = 1$, $b = 3$; б) $a - b$ при $a = -2$, $b = 4$;
в) $2x - y$ при $x = 5$, $y = 6$; г) $3x - 2y$ при $x = -1$, $y = -4$.

- 660.** а) ab при $a = \frac{3}{4}$, $b = 1\frac{3}{5}$; б) $2(a + b)$ при $a = \frac{3}{10}$, $b = 1\frac{1}{2}$;
в) abc при $a = \frac{1}{3}$, $b = 1\frac{1}{2}$, $c = 2$.

Найдите значение каждого буквенного выражения при указанных значениях x (661–662):

661.

x	1	3	0	-1	-5	$\frac{1}{3}$
$x - 1$						
$2x + 1$						
$3 - 3x$						
$1 + \frac{1}{2}x$						

662.

x	1	2	5	0	-2	-4
$2x$						
x^2						

663. Стороны прямоугольника a и b . Запишите формулу периметра прямоугольника. Вычислите периметр при:

- а) $a = 2$ см, $b = 3$ см; б) $a = 7$ см, $b = 9$ см;
в) $a = 1\frac{1}{5}$ см, $b = 3\frac{4}{5}$ см; г) $a = 2\frac{1}{2}$ см, $b = 3\frac{1}{4}$ см.

664. Стороны прямоугольника a и b . Запишите формулу площади прямоугольника. Вычислите площадь при:

- а) $a = 2$ см, $b = 7$ см; б) $a = 4$ см, $b = 5$ см;
в) $a = 3\frac{1}{2}$ см, $b = 2\frac{2}{5}$ см; г) $a = 3\frac{1}{5}$ см, $b = 1\frac{1}{4}$ см.

665. Сторона квадрата a . Запишите формулы периметра и площади квадрата. Вычислите периметр и площадь квадрата при:

- а) $a = 3$ см; б) $a = 8$ см; в) $a = 10$ см;
г) $a = \frac{1}{2}$ дм; д) $a = 3\frac{1}{2}$ см; е) $a = 2\frac{3}{4}$ см.

666. Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда a , b , c . Запишите формулу объёма прямоугольного параллелепипеда. Вычислите объём при:

а) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 5$ см; б) $a = \frac{2}{5}$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см.

667. Ребро куба a . Запишите формулу объёма куба. Вычислите объём при:

а) $a = 4$ см; б) $a = 5$ см; в) $a = 10$ см.

668. Составьте буквенное выражение для вычисления площади S фигуры (рис. 67).

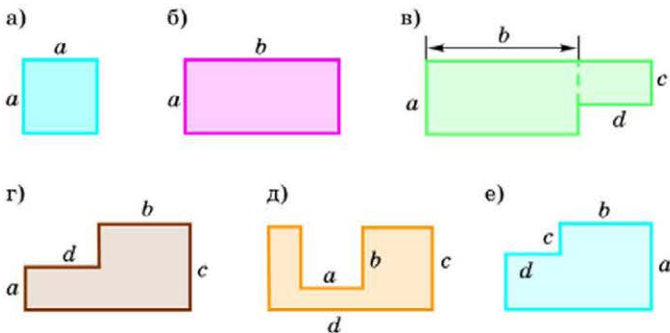


Рис. 67

Решите задачу, составляя числовое выражение (**669–671**):

669. а) Купили 7 тетрадей по 50 к. и 2 ручки по 3 р. Сколько заплатили за покупку?

б) Купили 4 линейки по 40 к. и 3 угольника по 80 к. Сколько сдачи получили с 5 р.?

670. а) Турист ехал 2 ч на поезде со скоростью 60 км/ч и шёл пешком 3 ч со скоростью 5 км/ч. Какое расстояние преодолел турист за 5 ч?

б) Длина маршрута 400 км. Турист ехал 4 ч поездом со скоростью 65 км/ч и 2 ч автобусом со скоростью 60 км/ч. За сколько часов он пройдёт остаток пути пешком, если будет идти со скоростью 5 км/ч?



671. а) В бригаде 8 маляров, каждый за 2 ч может покрасить одно окно. За сколько часов бригада покрасит 24 окна?

б) Бригаде из 8 маляров нужно покрасить 40 окон. Каждый маляр за 2 ч может покрасить одно окно. Сколько окон останется покрасить через 8 ч работы бригады?

Решите задачу, составив буквенное выражение (672–673):

672. а) Книга стоит x р. Сколько стоят 8 таких книг?

б) Купили 10 тетрадей по x р. и 3 ручки по 3 р. Сколько заплатили за покупку?

в) Купили x линейек по 40 к. и 4 тетради по 50 к. Сколько сдачи получили с 5 р.?

673. а) Турист ехал x ч на поезде со скоростью 50 км/ч и шёл пешком 2 ч со скоростью 4 км/ч. Какое расстояние преодолел турист за всё время?

б) Длина маршрута 400 км. Турист ехал 4 ч поездом со скоростью x км/ч и 3 ч автобусом со скоростью 70 км/ч. За сколько часов он пройдёт остаток пути пешком, если будет идти со скоростью 4 км/ч?

674. Через одну трубу можно наполнить бассейн за a мин, а через другую — за b мин. Через сколько минут наполнится бассейн, если открыть обе трубы? Составьте буквенное выражение для получения ответа, найдите его значение при:

а) $a = 30$, $b = 20$; б) $a = 70$, $b = 30$; в) $a = 60$, $b = 90$.

Составив буквенное выражение, решите задачи (675–676):

675. Сестра нашла x грибов, а брат в 2 раза больше. Сколько грибов нашёл брат? Сколько грибов они нашли вместе?

676. а) На решение примеров Вася затратил x мин, а на решение задачи на 10 мин больше. Сколько минут Вася затратил на всё задание?

б) В классе x девочек, а мальчиков на 4 меньше, чем девочек. Сколько всего учащихся в классе?

Доказываем

677. Докажите, что если из суммы двух чисел вычесть их разность, то получится удвоенное меньшее число, т. е. для любых чисел a и b ($a > b$) верно равенство $(a + b) - (a - b) = 2b$.

678. Докажите, что для любых чисел a и b ($a > b$) верно равенство

$$(a + b) + (a - b) = 2a.$$

Сформулируйте доказанное свойство суммы и разности двух чисел в виде правила.

Доказываем

679. В старину для решения задач пользовались такими правилами: чтобы по сумме и разности двух чисел найти большее число, надо к полусумме двух чисел прибавить их полуразность; чтобы найти меньшее число, надо из полусуммы двух чисел вычесть их полуразность. Докажите равенства:

а) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a;$

б) $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b.$

680. а) Сумма двух чисел равна 37, а разность 13. Найдите эти числа.

б) Сумма двух чисел равна 48, а разность 12. Найдите эти числа.

681. Найдите числа, сумма и разность которых равны соответственно:

а) 49 и 17; б) 72 и 48; в) 57 и 39; г) 38 и 2.

682. а) Сумма двух чисел равна 304, одно из них больше другого на 50. Найдите эти числа.

б) Сумма двух чисел 760. Одно меньше другого на 98. Найдите эти числа.

683. Если собственную скорость лодки обозначить x км/ч, а скорость течения y км/ч, то что можно найти, вычислив $x+y$; $x-y$?

684. Если скорость лодки по течению x км/ч, а скорость течения y км/ч, то что такое $x-y$; $x-2y$?

685. Если скорость лодки против течения x км/ч, а скорость течения y км/ч, то что такое $x+y$; $x+2y$?

2 Фигуры на плоскости, симметричные относительно прямой

Для фигур на плоскости, кроме симметрии относительно точки, существует ещё один вид симметрии — симметрия относительно прямой.

Рассмотрим две фигуры F_1 и F_2 и прямую a (рис. 68). Если плоскость рисунка перегнуть по прямой a , то фигуры F_1 и F_2 совместятся. Такие фигуры называют симметричными относительно прямой a .

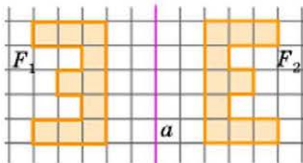


Рис. 68

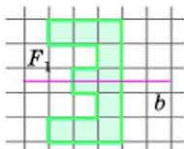


Рис. 69



Рис. 70



Рис. 71



Рис. 72

На рисунке 69 показана та же фигура F_1 и прямая b . Если плоскость рисунка перегнуть по прямой b , то одна часть фигуры F_1 совместится с другой её частью. Такую фигуру называют **симметричной относительно прямой b** , а саму прямую b — **осью симметрии** этой фигуры.

Симметричность относительно прямой встречается в природе, придавая листьям деревьев (рис. 70), крыльям бабочек (рис. 71) особую красоту. Не случайно в Древней Греции слово «симметрия» употреблялось в значении «красота», «соразмерность, одинаковость в расположении частей целого».

Симметричность относительно прямой часто используется при создании гербов и эмблем. На монете (рис. 72) изображён герб России, который имеет ось симметрии.

Симметричность относительно прямой присуща многим геометрическим фигурам. На рисунке 73 показан треугольник ABC , симметричный относительно прямой BD .

Есть и фигуры, имеющие несколько осей симметрии. Так, прямоугольник имеет две оси симметрии, квадрат — четыре, а окружность имеет бесконечно много осей симметрии — любая прямая, проходящая через её центр, является её осью симметрии (рис. 74).

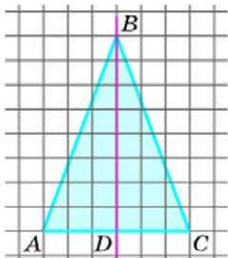


Рис. 73

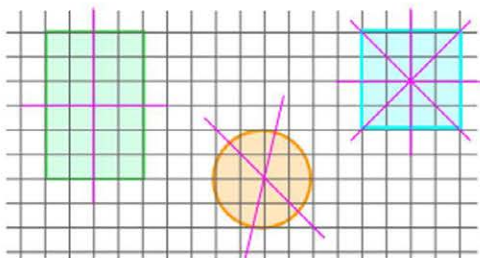


Рис. 74

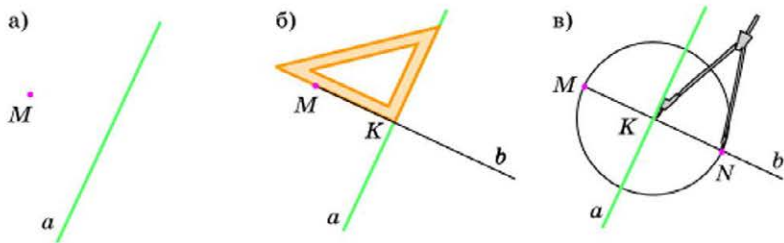


Рис. 75

Задача 1. Дана прямая a и точка M , не принадлежащая ей (рис. 75, а). Построим точку N , симметричную точке M относительно прямой a .

С помощью угольника через точку M проведём прямую b , перпендикулярную прямой a (рис. 75, б). Точку пересечения прямых b и a обозначим K и отложим на прямой b отрезок KN , равный отрезку MK . Мы получим точку N , симметричную точке M относительно прямой a (рис. 75, в).

Действительно, прямая b перпендикулярна прямой a , поэтому при перегибании плоскости чертёжка по прямой a одна часть прямой b совместится с другой. Это означает, что точка, симметричная точке M относительно прямой a , принадлежит прямой b . А так как $KN = MK$, то точка, симметричная точке M относительно прямой a , и есть точка N .

Заметим, что точку, симметричную точке M относительно прямой a , можно построить с помощью одного циркуля. Покажем, как это делается. На прямой a отметим две точки A и B . Построим окружность с центром A радиуса MA (рис. 76, б). Так как окружность симметрична относительно прямой a , то точка N , симметричная точке M относительно прямой a , лежит на этой окружности.

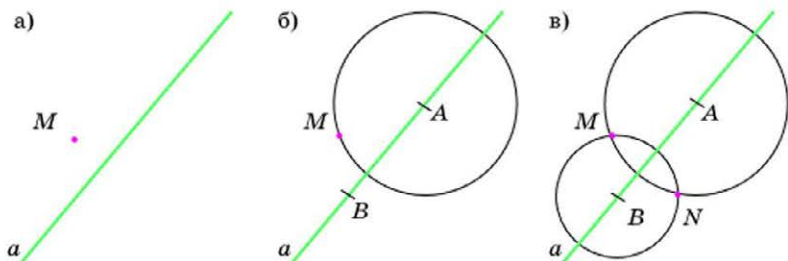


Рис. 76

Построим вторую окружность с центром B радиуса MB (рис. 76, ϵ). Так как и эта окружность симметрична относительно прямой a , то точка N , симметричная точке M относительно прямой a , лежит на этой второй окружности. Значит, искомая точка N есть вторая точка пересечения окружностей.

Задача 2. Дан треугольник ABC (рис. 77, a). Построим треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой AB .

Построим две окружности с центрами в точках A и B , проходящие через точку C . Точка D пересечения этих окружностей есть вершина искомого треугольника ABD , симметричного треугольнику ABC относительно прямой AB . Соединив точки A и D , B и D , получим искомым треугольник ABD (рис. 77, b).

Задача 3. Даны прямая a и две точки A и B , лежащие по одну сторону от этой прямой (рис. 78, a). На прямой отметим такую точку C , чтобы сумма расстояний от данных точек A и B до точки C была наименьшей.

Представим, что точка A_1 , симметричная точке A относительно прямой a , уже построена (рис. 78, b). Тогда для любой точки C прямой a отрезки AC и A_1C симметричны относительно прямой a , следовательно, эти отрезки равны. Так как $AC + BC = A_1C + BC$, то сумма расстояний $AC + BC$ будет наименьшей тогда, когда сумма расстояний $A_1C + BC$ будет наименьшей. Очевидно, что это произойдет только тогда, когда точка C будет лежать на прямой A_1B .

Построим точку A_1 , симметричную точке A относительно прямой a . Соединим точки A_1 и B . На пересечении прямых a и A_1B получим искомую точку C (рис. 78, ϵ).

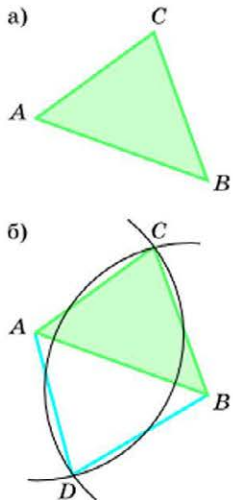


Рис. 77

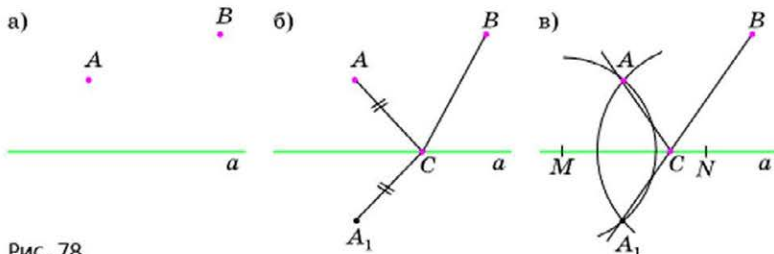


Рис. 78

686. Какие две фигуры называют симметричными относительно прямой a ?

687. По рисунку 79 определите, какая точка симметрична относительно прямой a точке: а) A ; б) B ; в) C ; г) D ; д) M .

688. По рисунку 79 определите, какой отрезок симметричен относительно прямой a отрезку:

а) AB ; б) BM ; в) BC ; г) CD ; д) AN ; е) ND ; ж) AD .

689. Какой фигуре симметричен относительно прямой a (рис. 79) прямоугольник: а) $ABMN$; б) $MCDN$; в) $ABCD$.

690. Какую фигуру называют симметричной относительно прямой a ?

691. Постройте на клетчатой бумаге прямоугольник 4×6 и все его оси симметрии. Сколько осей симметрии имеет прямоугольник?

692. Постройте на клетчатой бумаге квадрат 6×6 и все его оси симметрии. Сколько осей симметрии имеет квадрат?

693. Постройте окружность с центром O и три её оси симметрии. Сколько осей симметрии имеет окружность?

694. Перерисуйте в тетрадь те буквы алфавита, у которых есть ось симметрии. Для каждой из них укажите число осей симметрии.

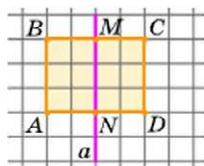


Рис. 79

**А Б В Г Д Е Ё Ж З И К Л М Н О П
Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю**

695. Нарисуйте в тетради фигуру, имеющую:
а) одну ось симметрии; б) две оси симметрии.

696. Перегните лист бумаги пополам, вырежьте ножницами какую-нибудь фигуру, имеющую ось симметрии.

697. Перегните лист бумаги, как показано на рисунке 80. Из полученного треугольника вырежьте выделенные цветом части. Сколько осей симметрии имеет полученная «снежинка»?

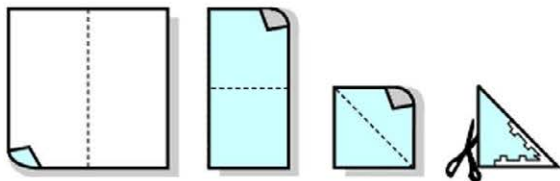


Рис. 80

698. Вырежьте из бумаги «снежинку», имеющую восемь осей симметрии.

699. Дан отрезок AB и прямая b , не пересекающая этот отрезок. Постройте отрезок MN , симметричный отрезку AB относительно прямой b .

700. Дана прямая b и отрезок AB , пересекающий эту прямую. Постройте отрезок MN , симметричный отрезку AB относительно прямой b . Где лежит точка пересечения отрезков AB и MN ? Как это объяснить?

701. Дан треугольник ABC и прямая b , не пересекающая стороны этого треугольника. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой b .

702. Дан треугольник ABC и прямая b , пересекающая стороны этого треугольника. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой b .

703. Дана прямая b и окружность, пересекающая эту прямую. Постройте окружность, симметричную данной окружности относительно прямой b .

а) 



б) 



Рис. 81

704. На плане (рис. 81) показана железная дорога и два города A и B . Укажите место на железной дороге, где надо построить станцию C , чтобы суммарная длина дороги от A до C и от C до B была наименьшей.

705. В жаркий день медвежонок направился из своего дома (A) в гости к ослику (B), но сначала решил подойти к реке попить воды. Укажите кратчайший путь от A до B с заходом к реке (рис. 82).

706. Другой раз медвежонок направился из дома (A) в гости к ослику (B), но сначала решил подойти к реке попить воды, а потом поесть малины. Укажите кратчайший путь от A до B с заходом к реке и к кустам малины (рис. 83).

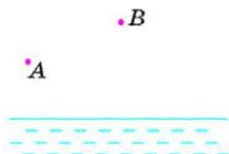


Рис. 82

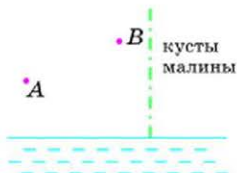


Рис. 83



Одно из значений латинского слова *ratio* — отношение двух чисел. Отсюда понятно определение: рациональным называют число, которое может быть представлено как отношение двух целых чисел.

Как известно, к понятию положительной дроби как отношению двух натуральных чисел математики пришли очень давно.

К признанию отрицательных дробей как чисел математики подходили тоже долго. Нуль, вначале означавший лишь отсутствие числа, стал рассматриваться как число только после введения отрицательных чисел. Как уже отмечалось в главе «Целые числа», современное истолкование рациональных чисел, основанное на откладывании отрезков на координатной оси вправо или влево от начальной точки (от нуля), было дано лишь в XVII веке.

Множество всех рациональных чисел обладает следующим замечательным свойством: любая арифметическая операция (сложение, умножение, вычитание и деление, за исключением деления на нуль) не выходит за пределы этого множества. Иными словами, результат применения любой такой операции к двум рациональным числам даёт также рациональное число. В таких случаях говорят, что множество замкнуто относительно всех этих операций. Обратим внимание, что ни одно из рассмотренных ранее множеств чисел (натуральных, целых, положительных рациональных) не обладало таким свойством.

Изучение свойств множеств, замкнутых относительно заданных операций, привело к созданию области математики, носящей название «Теория групп». Эта теория применяется в различных разделах науки: кристаллографии, геометрии, физике, механике и т. д.

4 ВНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

- 707.** а) Рыба весит 5 кг и ещё полрыбы. Сколько весит рыба?
 б) Книга стоит 30 р. и ещё полкниги. Сколько стоит книга?

***708.** Один автолюбитель рассказывал: «Я отправился путешествовать на «Москвиче», имея одно запасное колесо. Время от времени я заменял колёса, и оказалось, что первое колесо проехало 1000 км, второе — 900 км, третье — 800 км, четвёртое — 700 км и пятое — 600 км». Сколько километров проехал автомобиль? Может ли автомобилист так менять колёса, чтобы первое колесо проехало 1400 км, второе — 1200 км, третье — 1000 км, четвёртое — 800 км и пятое — 600 км?

- 709.** Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?
- 710.** Восемь подружек решили обменяться фотографиями так, чтобы у каждой из них оказались фотографии остальных подружек. Сколько фотографий для этого потребуется?
- 711.** В нашем классе каждая девочка дружит ровно с тремя мальчиками, а каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками. Сколько учащихся в нашем классе, если мальчиков на 5 больше, чем девочек?
- 712.** В первенстве по футболу принимают участие 8 команд. Каждая команда играет с каждой по одному разу. За выигрыш команда получает 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Какая наибольшая и какая наименьшая разница очков может быть между первым и последним местом, если известно, что первое место заняла одна команда и последнее место заняла одна команда?
- 713.** Большая коробка конфет в 2 раза дороже маленькой. Хотят купить 3 большие коробки и 2 маленькие, но если купить 2 большие коробки и 3 маленькие, то покупка будет дешевле на 15 р. Сколько стоит каждая коробка конфет?
- 714.** Один экскаватор может вырыть траншею за 30 ч, другой — за 20 ч. Первый проработал 9 ч, потом второй закончил работу. За сколько часов была выполнена работа?



715. (Индия, XI в.)

Есть кадамба цветок,
На один лепесток
Пчёлка пятая часть опустилась.

Рядом тут же росла
Вся в цвету сименгда,
И на ней третья часть поместилась.

Разность их ты найди,
Её трижды сложи
И тех пчёл на Кутай посади.

Лишь одна не нашла себе места нигде.
Всё летала то взад, то вперёд и везде
Ароматом цветов наслаждалась.

Назови теперь мне,
Подсчитавши в уме,
Сколько пчёл всего здесь собралось.

716. (Армения, VII в.) Один купец прошёл через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества, во втором городе половину и треть [с того, что осталось] и в третьем городе снова взыскали половину и треть [с того, что у него было]; и когда он прибыл домой, у него осталось 11 дахеканов [денежных единиц]. Итак, узнай, сколько всего дахеканов было вначале у купца.

717. Из Акмимского папируса (VI в.). Некто взял из сокровищницы $\frac{1}{13}$. Другой взял $\frac{1}{17}$ из того, что осталось, оставил же в сокровищнице 150. Мы хотим узнать, сколько было в сокровищнице первоначально.

718. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Некто пришёл в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил $\frac{1}{5}$ часть всех своих денег, за вторую $\frac{3}{7}$ остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил $\frac{3}{5}$ остатка от второй покупки, а по приезде в дом нашёл остальных в кошельке денег 1 р. 92 к. Спрашивается, сколько в кошельке денег было и сколько за которую игрушку денег заплачено.

719. Для перевозки 25 зеркал нанят извозчик с условием заплатить ему по 1 р. 50 к. за доставку каждого зеркала в целости и вычест с него по 5 р. за каждое разбитое им зеркало. На дороге извозчик действительно разбил несколько зеркал и за перевозку получил только 18 р. Сколько зеркал он доставил в целости?

***720.** Первый мастер шьёт шубу за 5 дней, а второй — за 3 дня. Как распределить между ними заказ на пошив 9 шуб, чтобы каждый сшил целое число шуб и заказ был выполнен в кратчайший срок?

***721.** Три пирата Джон, Джек и Билл откопали кувшин с золотыми. Джон хотел взять себе треть всех золотых и половину остатка дать Джеку. Джек хотел взять себе половину всех золотых и треть остатка дать Джону. На каком варианте дележа они остановились, Билл не помнит, но он точно знает, что ему досталось 50 золотых. Сколько золотых было в кувшине?



722 Имея полный бак топлива, рыбак может проплыть на моторной лодке 20 км против течения или 30 км по течению реки. На какое наибольшее расстояние он может отплыть по реке при условии, что топлива должно хватить и на обратный путь? Движение с выключенным мотором не рассматривается.

723 Остап купил 4 новых колеса для своего автомобиля. Он знает, что передние колёса автомобиля изнашиваются через 12 тыс. км пробега, а задние — через 8 тыс. км пробега. Какой наибольший путь может проехать автомобиль, если Остап догадается вовремя поменять задние колёса с передними?

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Изучая главу 4, вы познакомитесь с десятичными дробями, научитесь их сравнивать, выполнять все арифметические действия с ними. Десятичные дроби являются лишь другой записью обыкновенных дробей, знаменатели которых — степени числа 10, поэтому для них верны те же законы сложения и умножения, что и для рациональных чисел. Десятичные дроби являются наиболее удобными на практике, и вы неоднократно будете встречаться с ними при изучении математики и других школьных предметов.

4.1. Понятие положительной десятичной дроби

Дробь, у которой знаменатель является степенью числа 10, часто записывают в более простой форме, не записывая знаменатель, а отделяя целую и дробную части друг от друга запятой (при этом считают, что целая часть правильной дроби равна 0).

Например,

$$\frac{27}{10} = 2\frac{7}{10} = 2,7; \quad \frac{717}{100} = 7\frac{17}{100} = 7,17; \quad \frac{111}{1000} = 0,111.$$

Записанные в такой форме дроби называют десятичными дробями, т. е. записи $2\frac{7}{10}$ и $2,7$ — разные формы записи одного и того же числа: первая — в виде смешанной дроби, вторая — в виде десятичной дроби. Пока будем рассматривать только положительные десятичные дроби.

Напомним, что в десятичной системе счисления значение каждой цифры зависит от разряда (позиции), в котором она записана. При этом единицы соседних разрядов отличаются в 10 раз.

Например, десяток в 10 раз меньше сотни, единица в 10 раз меньше десятка.

Первый разряд после запятой называют **разрядом десятых**. Например, число 2,7 состоит из 2 целых и 7 десятых — читают «две целых семь десятых».

Второй разряд после запятой называют **разрядом сотых**. Например, дробь 0,35 читают «нуль целых тридцать пять сотых». Число 0,35 состоит из 0 целых 3 десятых и 5 сотых.

Чтобы лучше понять правила записи и чтения десятичных дробей, рассмотрим таблицу разрядов и приведённые в ней примеры записи чисел:

Обыкновенная (смешанная) дробь	Десятичная дробь											
	Целая часть				,	Дробная часть						
	...	сотни	десятки	единицы		десятые	сотые	тысячные	десяти-тысячные	стотысячные	миллионные	...
$2\frac{7}{10}$				2	,	7						
$200\frac{35}{100}$		2	0	0	,	3	5					
$\frac{19}{1000}$				0	,	0	1	9				
$16\frac{701}{10000}$			1	6	,	0	7	0	1			

Для записи числа $\frac{19}{1000}$ в виде десятичной дроби нужно учесть, что

$$\frac{19}{1000} = \frac{10+9}{1000} = \frac{10}{1000} + \frac{9}{1000} = \frac{0}{10} + \frac{1}{100} + \frac{9}{1000},$$

т. е. число содержит 0 десятых, 1 сотую, 9 тысячных: $\frac{19}{1000} = 0,019$.

Как видим, после запятой в записи десятичной дроби получается столько цифр, сколько нулей содержит знаменатель соответствующей ей обыкновенной дроби. Например,

$$\frac{3}{100} = 0,13; \quad 12\frac{7}{1000} = 12,007; \quad \frac{135}{10000} = 0,0135.$$

2 нуля 2 цифры 3 нуля 3 цифры 4 нуля 4 цифры

724. Запишите обыкновенные и смешанные дроби в виде десятичных и прочитайте полученные записи:

- а) $3\frac{1}{10}$, $2\frac{9}{10}$, $15\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{27}{10}$;
 б) $5\frac{12}{100}$, $7\frac{20}{100}$, $6\frac{91}{100}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{85}{100}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{111}{100}$;
 в) $5\frac{135}{1000}$, $17\frac{399}{1000}$, $8\frac{999}{1000}$, $\frac{777}{1000}$, $\frac{123}{1000}$, $\frac{87}{1000}$, $\frac{2011}{1000}$;
 г) $4\frac{8899}{10000}$, $1\frac{5678}{10000}$, $\frac{1234}{10000}$, $\frac{6969}{10000}$, $\frac{98}{10000}$, $\frac{2012}{10000}$.

725. Прочитайте дроби, запишите их в виде обыкновенных или смешанных дробей:

- а) 3,2; 7,3; 3,5; 0,1; 0,9;
 б) 7,12; 9,23; 10,34; 0,45; 0,56;
 в) 12,333; 16,596; 0,887; 0,379; 0,111;
 г) 2,1111; 5,1995; 4,1996; 0,1997; 0,1998.

726. Запишите обыкновенные и смешанные дроби в виде десятичных и прочитайте полученные записи:

- а) $4\frac{1}{100}$, $215\frac{3}{100}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{11}{100}$, $21\frac{17}{100}$;
 б) $3\frac{1}{1000}$, $7\frac{12}{1000}$, $\frac{8}{1000}$, $\frac{81}{1000}$, $32\frac{7}{1000}$, $\frac{113}{1000}$;
 в) $6\frac{5}{10000}$, $2\frac{13}{10000}$, $\frac{356}{10000}$, $\frac{679}{10000}$, $\frac{2011}{10000}$, $15\frac{17}{10000}$;
 г) $7\frac{7}{100000}$, $100\frac{46}{100000}$, $\frac{627}{100000}$, $\frac{1111}{100000}$, $98\frac{2012}{100000}$.

727. Запишите в виде неправильной дроби:

- а) 12,3; б) 1,23; в) 10,123; г) 987,6; д) 98,76;
 е) 9,876; ж) 2,2222; з) 22,222; и) 222,22.

728. Прочитайте дроби:

- а) 5,05; 7,01; 12,07; 0,01; 0,09;
 б) 19,004; 6,016; 8,008; 0,001; 0,022;
 в) 13,0007; 2,0089; 16,0999; 0,0001; 0,0022;
 г) 31,00009; 7,00099; 0,00001; 0,00666.

729. Прочитайте дроби, назовите их целые части, назовите цифры разрядов десятых, сотых и т. д.

а) 16,789; 0,1234; 100,56789; б) 0,023; 7,00526; 0,00017.

730. Запишите в виде десятичной дроби по образцу:

$$\text{а) } \frac{18}{30} = \frac{3 \cdot 6}{3 \cdot 10} = \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$\text{б) } \frac{27}{90}, \frac{24}{120}, \frac{24}{40}, \frac{48}{60};$$

$$\text{в) } \frac{15}{500}, \frac{160}{400}, \frac{36}{900}, \frac{140}{700};$$

$$\text{г) } \frac{11}{11000}, \frac{81}{3000}, \frac{144}{40000}, \frac{8888}{400000}.$$

731. Запишите в виде десятичной дроби по образцу:

$$\text{а) } \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 0,25;$$

$$\text{б) } \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5};$$

$$\text{в) } \frac{3}{4}, \frac{1}{25}, \frac{3}{25}, \frac{24}{25}, \frac{7}{25};$$

$$\text{г) } \frac{1}{20}, \frac{1}{50}, \frac{21}{50}, \frac{3}{40}, \frac{9}{200};$$

$$\text{д) } \frac{16}{10}, \frac{324}{100}, \frac{99}{10}, \frac{1234}{1000};$$

$$\text{е) } \frac{168}{40}, \frac{328}{80}, \frac{9999}{900}, \frac{1648}{160};$$

$$\text{ж) } \frac{3}{2}, \frac{6}{5}, \frac{17}{4}, \frac{39}{25};$$

$$\text{з) } \frac{13}{20}, \frac{14}{20}, \frac{14}{700}, \frac{35}{500}, \frac{36}{500}.$$

732. Выразите в метрах и дециметрах по образцу:

$$\text{а) } 3,2 \text{ м} = 3 \text{ м } 2 \text{ дм};$$

$$\text{б) } 4,9 \text{ м};$$

$$\text{в) } 6,1 \text{ м}.$$

733. Выразите в метрах и сантиметрах:

$$\text{а) } 3,12 \text{ м};$$

$$\text{б) } 8,54 \text{ м};$$

$$\text{в) } 6,02 \text{ м};$$

$$\text{г) } 6,2 \text{ м}.$$

734. Выразите в рублях и копейках по образцу:

$$\text{а) } 3,45 \text{ р.} = 3 \text{ р. } 45 \text{ к.};$$

$$\text{б) } 3,56 \text{ р.};$$

$$\text{в) } 5,6 \text{ р.};$$

$$\text{г) } 6,05 \text{ р.};$$

$$\text{д) } 6,1 \text{ р.};$$

$$\text{е) } 0,25 \text{ р.}$$

735. Выразите в килограммах и граммах:

$$\text{а) } 8,537 \text{ кг};$$

$$\text{б) } 8,037 \text{ кг};$$

$$\text{в) } 8,007 \text{ кг};$$

$$\text{г) } 8,530 \text{ кг};$$

$$\text{д) } 8,500 \text{ кг}.$$

736. Выразите в тоннах и килограммах:

$$\text{а) } 0,435 \text{ т};$$

$$\text{б) } 4,350 \text{ т};$$

$$\text{в) } 5,024 \text{ т};$$

$$\text{г) } 6,030 \text{ т};$$

$$\text{д) } 7,008 \text{ т}.$$

737. Запишите величину, используя десятичные дроби, по образцу:

$$\text{а) } 23 \text{ см } 2 \text{ мм} = 23 \frac{2}{10} \text{ см} = 23,2 \text{ см};$$

$$\text{б) } 5 \text{ м } 6 \text{ дм};$$

$$\text{в) } 7 \text{ м } 54 \text{ см};$$

$$\text{г) } 8 \text{ м } 4 \text{ см};$$

$$\text{д) } 11 \text{ ц } 52 \text{ кг};$$

$$\text{е) } 11 \text{ ц } 50 \text{ кг};$$

$$\text{ж) } 11 \text{ ц } 5 \text{ кг};$$

$$\text{з) } 5 \text{ р. } 48 \text{ к.};$$

$$\text{и) } 5 \text{ р. } 50 \text{ к.};$$

$$\text{к) } 3 \text{ р. } 5 \text{ к}.$$

***738.** Выполните действия:

- а) $8,23 \text{ м} + 3,56 \text{ м}$; б) $7,39 \text{ р.} - 6,27 \text{ р.}$;
в) $0,3 \text{ дм} \cdot 0,2 \text{ дм}$; г) $1,3 \text{ м} \cdot 0,02 \text{ м}$;
д) $4,62 \text{ км} : 2 \text{ с}$; е) $12 \text{ км} : 5 \text{ ч}$.

4.2. Сравнение положительных десятичных дробей

В дробной части десятичной дроби можно приписать справа нули — получится дробь, равная данной.

Например, $0,2 = 0,20 = 0,200 = \dots$ потому, что

$$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = \frac{200}{1000} = \dots$$

Если в дробной части десятичной дроби имеются справа нули, то их можно отбросить — получится дробь, равная данной.

Например, $8,3600 = 8,36$, так как

$$8,3600 = 8 \frac{3600}{10000} = 8 \frac{36}{100} = 8,36.$$

Натуральное число можно записать в виде равной ему десятичной дроби.

Например, $7 = 7,0 = 7,00 = 7,000 = \dots$, так как

$$7 = 7 \frac{0}{10} = 7 \frac{0}{100} = 7 \frac{0}{1000} = \dots$$

Отметим, что $0 = 0,0 = 0,00 = 0,000 = \dots$

Нули справа после запятой сохраняют в тех случаях, когда нужно подчеркнуть точность измерения.

Например, если в результате измерения длины отрезка с точностью до сантиметра получили $3 \text{ м } 0 \text{ см}$, то пишут $3,00 \text{ м}$.

Из двух десятичных положительных дробей больше та, у которой целая часть больше; при равенстве целых частей больше та дробь, у которой цифра разряда десятых больше; при равенстве целых частей и цифр разряда десятых больше та дробь, у которой цифра разряда сотых больше, и т. д.

Например, $3,5 > 2,5$, так как целая часть первой дроби больше целой части второй дроби; $0,5 > 0,38$, так как целые части дробей равны, но цифра разряда десятых первой дроби больше, чем цифра разряда десятых второй дроби¹.

739. Что получится, если у десятичной дроби в дробной части написать справа нули? Приведите примеры.

740. Что получится, если у десятичной дроби в дробной части отбросить справа нули? Приведите примеры.

741. Какая из двух положительных десятичных дробей больше? Приведите примеры.

742. Уравняйте число цифр после запятой у дробей:

- а) 1,2 и 3,51; б) 0,23 и 0,123; в) 0,6 и 3,02;
г) 7,125 и 0,48007; д) 6,23 и 7,5; е) 8,2001 и 9,00007.

743. Сколько десятых, сотых, тысячных содержит дробь:

- а) 1,235; б) 1,27; в) 3,51; г) 0,5?

744. Какая из дробей больше:

- а) 6,35 или 5,19; б) 7,48 или 7,51;
в) 2,52 или 2,53; г) 17,49 или 17,5?

745. Используя знаки = и \neq , сравните дроби:

- а) 7,5 и 7,50; б) 8,5 и 9,1; в) 0,48 и 0,4;
г) 0,25 и 0,2500; д) 7,48 и 7,481; е) 3,1 и 2,99.

Используя знаки $>$ и $<$, сравните дроби (**746–748**):

746. а) 3,59 и 7,1; б) 6,28 и 6,9; в) 0,4 и 0,51;
г) 72,7 и 7,27; д) 4,1234 и 4,1231; е) 12,39 и 1,2399.

747. а) 2,078 и 2,780; б) 3,205 и 3,025; в) 7,250 и 7,205;
г) 4,290 и 4,295; д) 12,4 и 12,41; е) 15,129 и 15,1.

748. а) 6,92 и 6,9; б) 1,2 и 1,19; в) 72,3 и 7,239; г) 0,48 и 0,471.

Укажите число, большее одного из данных чисел, но меньшее другого (**749–751**):

749. а) 4000 и 5000; б) 4200 и 4300;
в) 4250 и 4260; г) 4290 и 4300.

750. а) 0,600 и 0,700; б) 0,650 и 0,660;
в) 0,650 и 0,655; г) 0,655 и 0,660.

751. а) 0,6 и 0,7; б) 0,48 и 0,49;
в) 0,65 и 0,66; г) 0,325 и 0,326.



¹ Когда говорят, что цифры равны (или одна цифра больше другой), то имеют в виду, что соответствующие им числа равны (или одно число больше другого).

2 единицы плюс 7 единиц получим 9 единиц. Пишем в разряде единиц цифру 9. Получаем ответ: 9,911.

Вычитание десятичных дробей производится так же, как и вычитание натуральных чисел. Пока мы рассматриваем вычитание из большего положительного числа меньшего.

Пример 2. Вычислим разность $3,51 - 2,387$.

Решение. Учитывая, что $3,51 - 2,387 = = 3,510 - 2,387$, проведём вычитание столбиком, подписывая цифры соответствующих разрядов друг под другом и рассуждая следующим образом:

	3,	5	1	0
-	2,	3	8	7
	1,	1	2	3

Из 0 тысячных вычтем 7 тысячных (чтобы получить неотрицательное число) нельзя. Занимаем в уменьшаемом одну сотую и раздробляем её в 10 тысячных. Тогда 10 тысячных минус 7 тысячных получится 3 тысячных. Пишем в разряде тысячных цифру 3.

Из 0 сотых вычтем 8 сотых (чтобы получилось неотрицательное число) нельзя. Занимаем в уменьшаемом одну десятую и раздробляем её в 10 сотых. Тогда 10 сотых минус 8 сотых получится 2 сотых. Пишем в разряде сотых цифру 2.

4 десятых минус 3 десятых получится 1 десятая. Пишем в разряде десятых цифру 1.

3 единицы минус 2 единицы получится 1 единица. Пишем в разряде единиц цифру 1. Получаем ответ: 1,123.

При сложении и вычитании любых положительных десятичных дробей поступают так же, как в примерах 1 и 2. А именно: сначала у дробей уравнивают число цифр после запятой, затем их складывают или вычитают столбиком как натуральные числа. В ответе ставят запятую под запятой.

Для десятичных дробей выполняются переместительный и сочетательный законы сложения, так как эти законы выполняются для равных им обыкновенных дробей. Это позволяет в сумме нескольких слагаемых переставлять слагаемые и заключать их в скобки любым образом и опускать скобки по тем же правилам, как и для обыкновенных дробей.

Вычислите (759–761):

- | | | | |
|-------------|--------------------|------------------------|---------------------|
| 759. | а) $1,5 + 2,3$; | б) $3,7 + 1,4$; | в) $12,3 + 1,23$; |
| | г) $7,84 + 8,9$; | д) $125,34 + 12,534$; | е) $7,53 + 8,624$. |
| 760. | а) $6,48 - 2,35$; | б) $7,26 - 3,19$; | в) $2,528 - 1,9$; |
| | г) $7,2 - 3,148$; | д) $6,98 - 3,99$; | е) $7,25 - 3,261$. |
| 761. | а) $38 + 0,56$; | б) $7,39 + 11$; | в) $0,736 + 25$; |
| | г) $8,248 - 6$; | д) $7,2 - 1,899$; | е) $5 - 3,78$. |

Вычислите, применяя законы сложения и правила раскрытия скобок (762–763):

- 762.** а) $7,48 + 3,19 + 1,12 + 6,81$; б) $6,2 + 7,49 + 1,8 + 1,29$;
в) $16,28 + 5,395 - 1,18 - 4,305$; г) $7,358 + 8,24 - 6,458 - 2,84$.

- 763.** а) $5,236 + (4,664 - 2,6)$; б) $4,756 - (2,395 - 1,244)$.

764. Заменяв десятичную дробь обыкновенной, вычислите:

- а) $2,5 + 3\frac{1}{2}$; б) $7\frac{3}{4} - 2,25$; в) $0,2 \cdot 3$;
г) $4,8 : 4$; д) $6 : 0,6$; е) $12 : 0,3$.

765. Заменяв обыкновенную дробь десятичной, вычислите:

- а) $\frac{1}{10} + 2,5$; б) $7\frac{3}{100} - 2,15$; в) $4,12 - 1\frac{1}{5}$;
г) $9,1 + 3\frac{1}{2}$; д) $17,3 - 9\frac{1}{4}$; е) $6,09 + 2\frac{1}{25}$.

766. Вычислите периметр прямоугольника, если:

- а) его ширина равна 2,3 см, а длина на 1,9 см больше;
б) его ширина равна 2,48 дм, а длина на 1,6 дм больше;
в) его длина равна 12,1 см, а ширина на 4,8 см меньше;
г) его длина равна 18 дм, а ширина на 4,7 дм меньше.

767. Вычислите по образцу:

а) $1,2 \text{ дм} + 1,2 \text{ см} = 1,2 \text{ дм} + 0,12 \text{ дм} = 1,32 \text{ дм}$;

- б) $16 \text{ см} + 4,35 \text{ дм}$; в) $7,35 \text{ м} + 4,9 \text{ дм}$; г) $2 \cdot 4,8 \text{ дм}$;
д) $4,8 \text{ дм} : 2$; е) $12,3 \text{ дм} - 42 \text{ см}$; ж) $34 \text{ дм} - 34 \text{ см}$.

768. Вычислите периметр треугольника, имеющего стороны:

- а) 490 мм, 48 см, 4,7 дм; б) 23 мм, 3,4 см, 0,48 дм;
в) 3,5 см, 0,38 дм, 0,041 м; г) 0,125 м, 1,3 дм, 14,5 см.

769. В квартире две комнаты. Одна комната имеет площадь $16,3 \text{ м}^2$, а другая на $1,9 \text{ м}^2$ меньше. Какова площадь двух комнат?

770. В квартире три комнаты общей площадью $44,8 \text{ м}^2$. Одна комната имеет площадь $11,3 \text{ м}^2$, другая на $3,5 \text{ м}^2$ больше. Найдите площадь третьей комнаты.

771. Щенок весит 2,5 кг, а котёнок на 2,1 кг меньше. Сколько весят котёнок и щенок вместе?

772. Турист проехал на автобусе 48,4 км — это на 25,8 км больше, чем он прошёл пешком. Какое расстояние турист преодолел на автобусе и пешком?

773. Боря собрал 12,6 кг яблок — это на 2,8 кг больше, чем собрал Алёша, и на 1,4 кг меньше, чем собрал Серёжа. Сколько килограммов яблок собрали мальчики вместе?

- 774.** В кассе была некоторая сумма денег. Поступило в кассу 480,5 р., а выдано из кассы 538,1 р. После чего в кассе осталось 1230,8 р. Сколько денег было в кассе первоначально?
- 775.** Скорость течения реки 4,2 км/ч, а собственная скорость лодки 7,5 км/ч. Определите скорость лодки по течению и против течения.
- 776.** Скорость катера по течению 22,5 км/ч, а против течения 18,5 км/ч. Какова собственная скорость катера?

4.4. Перенос запятой в положительной десятичной дроби

Чтобы десятичную дробь увеличить в 10, 100, 1000 и т. д. раз, т. е. умножить на 10, 100, 1000 и т. д., надо в записи дроби перенести запятую вправо на 1, 2, 3 и т. д. цифры, приписав при необходимости нули справа.

Примеры: 1) Увеличив дробь 35,783 в 10 раз, получим дробь 357,83, так как $35,783 \cdot 10 = \frac{35783}{1000} \cdot 10 = \frac{35783}{100} = 357,83$.

Таким образом, увеличение дроби в 10 раз привело к переносу запятой на 1 цифру вправо.

2) Перенеся запятую в дроби 35,783 на 2 цифры вправо, получим дробь 3578,3, в 100 раз большую данной дроби 35,783. В самом деле,

$$3578,3 = \frac{35783}{10} = \frac{35783}{1000} \cdot 100 = 35,783 \cdot 100.$$

3) Если учесть, что $35,783 = 35,78300$, то, перенеся запятую в дроби 35,783 на 5 цифр вправо, получим число 3 578 300, в 100 000, или в 10^5 , раз большее первоначальной дроби.

Таким образом, перенося запятую в записи дроби на 1, 2 и т. д. цифры вправо, мы увеличиваем эту дробь соответственно в 10, 100 и т. д. раз.

Чтобы уменьшить десятичную дробь в 10, 100, 1000 и т. д. раз, надо в записи дроби перенести запятую влево соответственно на 1, 2, 3 и т. д. цифры, приписав при необходимости нули слева.

Примеры: 1) Дробь 3,5783 в 10 раз меньше дроби 35,783. Первая дробь получена из второй переносом запятой влево на 1 цифру.

2) Если в данной дроби 35,783 перенести запятую на 2 цифры влево, то получим дробь 0,35783, которая в 100 раз ($100 = 10^2$) меньше данной.

Таким образом, перенося запятую в записи десятичной дроби на 1, 2 и т. д. цифры влево, мы уменьшаем эту дробь соответственно в 10, 100 и т. д. раз.

777. В какую сторону и на сколько цифр надо перенести запятую, чтобы увеличить десятичную дробь:

- а) в 10 раз; б) в 100 раз; в) в 1000 раз;
г) в 10 000 раз; д) в 100 000 раз; е) в 1 000 000 раз?

778. В какую сторону и на сколько цифр надо перенести запятую, чтобы уменьшить десятичную дробь:

- а) в 10 раз; б) в 100 раз; в) в 1000 раз;
г) в 10 000 раз; д) в 100 000 раз; е) в 1 000 000 раз?

779. а) Как изменится дробь, если в её десятичной записи запятую перенести на 3 цифры вправо? на 3 цифры влево?

780. Как изменится дробь, если:

- а) запятую в её десятичной записи перенести сначала на 2 цифры вправо, а затем на 3 цифры влево;
б) запятую в её десятичной записи перенести сначала на 3 цифры влево, а затем на 2 цифры вправо?

781. Как изменится положение запятой в записи десятичной дроби, если эту дробь:

- а) сначала увеличить в 10 раз, потом ещё в 100 раз;
б) сначала увеличить в 10 раз, а потом уменьшить в 100 раз;
в) сначала уменьшить в 10 раз, потом ещё в 100 раз;
г) сначала уменьшить в 10 раз, а потом увеличить в 100 раз?

782. Какое число больше и во сколько раз:

- а) 32,549 или 325,49; б) 2,7543 или 2754,3;
в) 47,58 или 4,758; г) 123,45 или 1,2345?

783. Какое число меньше и во сколько раз:

- а) 0,4853 или 4853; б) 0,296 или 0,00296;
в) 480 или 0,48; г) 200 или 0,02?

784. Увеличьте следующие дроби в 10, 100, 1000 раз:

- а) 7,3459; б) 8,279; в) 9,13; г) 7,2.

785. Выразите в сантиметрах по образцу:

- а) 4,25 дм = 42,5 см; б) 4,2 мм = 0,42 см;
в) 5,21 дм; г) 3,2 дм; д) 13,2 мм; е) 2,1 мм.

- 786.** Выразите в дециметрах:
 а) 4,84 м; б) 3,5 м;
 в) 396,7 см; г) 2,5 см;
 д) 13 мм; е) 25,4 мм.



- 787.** Выразите в метрах:
 а) 20 см; б) 34,1 см;
 в) 15,6 дм; г) 3,4 дм;
 д) 0,5265 км; е) 1,4356 км.

- 788.** Выразите в килограммах:
 а) 1,246 ц; б) 12,46 ц; в) 124,6 ц; г) 15 ц;
 д) 1,5245 т; е) 15,245 т; ж) 152,45 т; з) 0,0485 т;
 и) 7548 г; к) 238 г; л) 45 г; м) 5 г.

- *789.** Выразите в квадратных километрах (км²):
 а) 1245 га; б) 125 га; в) 1256 га; г) 145 га.

- *790.** Выразите в квадратных сантиметрах (см²):
 а) 3,548 дм²; б) 3,9 дм²; в) 635 мм²; г) 23 мм².

- *791.** Выразите в кубических метрах (м³):
 а) 4754 дм³; б) 723 дм³; в) 35 дм³; г) 7 дм³.

- *792.** Выразите в кубических миллиметрах (мм³):
 а) 0,3574 см³; б) 2,3915 см³; в) 7,29 см³; г) 4,325 см³.

4.5. Умножение положительных десятичных дробей

Десятичная форма записи дробей позволяет умножать их практически по тем же правилам, по которым умножают натуральные числа. Отличие заключается в том, что необходимо определять место запятой в полученном произведении. Поясним сказанное.

Пример 1. Вычислим произведение $2,5 \cdot 1,02$.

Решение. Перенесём запятую в первом множителе на 1 цифру вправо, а во втором на 2 цифры вправо. Тем самым первый множитель увеличится в 10 раз, второй в $10^2 = 100$ раз, а произведение в $10 \cdot 100 = 1000$ раз.

Вычислим произведение натуральных чисел 25 и 102:

$$25 \cdot 102 = 2550.$$

Полученное число в 1000 раз больше, чем требуемое произведение. Поэтому необходимо число 2550 уменьшить в $1000 = 10^3$ раз, т. е. перенести

			2	5
		×	1	0
			5	0
	+		2	5
			2	5
			5	0

в этом числе запятую влево на 3 цифры. Таким образом,

$$2,5 \cdot 1,02 = 2,550 = 2,55.$$

Можно рассуждать по-другому, применяя правило умножения обыкновенных дробей:

$$2,5 \cdot 1,02 = \frac{25}{10} \cdot \frac{102}{100} = \frac{25 \cdot 102}{10 \cdot 100} = \frac{2550}{1000} = 2,55.$$

Таким образом,

					2,5
					×
					1,02

					50
					+
					25

					2,550

чтобы перемножить две десятичные дроби, достаточно перемножить их как натуральные числа, не обращая внимания на запятые, а в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их было после запятых в обоих множителях вместе.

Для десятичных дробей справедливы переместительный и сочетательный законы умножения, а также распределительный закон, потому что эти законы верны для равных им обыкновенных дробей. Эти законы применяются для упрощения вычислений.

Например, вычислим, используя законы:

$$0,9 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 1,1 - 8,1 \cdot 0,12 + 7,1 \cdot 0,12 = \\ = 0,2 \cdot (0,9 + 1,1) - 0,12 \cdot (8,1 - 7,1) = 0,2 \cdot 2 - 0,12 \cdot 1 = 0,4 - 0,12 = 0,28.$$

793. Сформулируйте правило умножения двух десятичных дробей. Вычислите произведение (**794–799**):

794. а) $0,02 \cdot 10$; б) $3,2 \cdot 100$; в) $0,3 \cdot 1000$;
г) $2,39 \cdot 1000$; д) $0,041 \cdot 100$; е) $0,0005 \cdot 1000$.

795. а) $2,4 \cdot 2$; б) $3,1 \cdot 3$; в) $0,5 \cdot 2$;
г) $2,5 \cdot 4$; д) $1,25 \cdot 8$; е) $0,072 \cdot 2$;
ж) $5,2 \cdot 0,4$; з) $7,1 \cdot 0,9$; и) $0,08 \cdot 0,13$.

796. а) $6,5 \cdot 0,004$; б) $0,09 \cdot 0,18$; в) $7,6 \cdot 0,005$;
г) $0,048 \cdot 0,09$; д) $0,7 \cdot 0,0085$; е) $0,009 \cdot 0,78$;
ж) $80,8 \cdot 0,7$; з) $0,09 \cdot 5,007$; и) $0,6 \cdot 3,054$.

797. а) $3,59 \cdot 0,1$; б) $2,3 \cdot 0,1$; в) $0,0235 \cdot 0,1$;
г) $63,2 \cdot 0,01$; д) $3,5 \cdot 0,01$; е) $2,32 \cdot 0,01$;
ж) $723,1 \cdot 0,001$; з) $79,4 \cdot 0,001$; и) $3,8 \cdot 0,001$.

798. а) $4,381 \cdot 0,2$; б) $7,713 \cdot 0,8$; в) $0,07 \cdot 620,4$;
г) $0,2569 \cdot 0,6$; д) $0,3 \cdot 2,451$; е) $67,19 \cdot 0,05$;
ж) $42,25 \cdot 0,4$; з) $362,5 \cdot 0,8$; и) $512,5 \cdot 0,08$.

- 799.** а) $2,3 \cdot 1,1$; б) $4,3 \cdot 1,2$; в) $0,22 \cdot 3,3$;
 г) $53 \cdot 0,31$; д) $0,68 \cdot 61$; е) $0,72 \cdot 0,015$;
 ж) $4,35 \cdot 2,2$; з) $3,2 \cdot 0,25$; и) $0,084 \cdot 0,55$.
- 800.** Вычислите, применяя законы умножения:
 а) $0,25 \cdot 0,3 \cdot 4$; б) $0,2 \cdot 0,13 \cdot 50$; в) $0,8 \cdot 0,11 \cdot 1,25$;
 г) $0,125 \cdot 3 \cdot 0,8$; д) $0,5 \cdot 7,3 \cdot 2,2$; е) $0,25 \cdot 1,7 \cdot 1,6$.
- Вычислите (**801—805**):
- 801.** а) $2,4 \cdot 4,8 + 2,6 \cdot 4,8$; б) $30,5 \cdot 20,3 - 30,5 \cdot 0,3$;
 в) $5,1 \cdot 1,8 - 1,8$; г) $4,9 \cdot 6,2 + 6,2$.
- 802.** а) $0,1 \cdot 0,1$; б) $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2$; в) $0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3$;
 г) $0,05 \cdot 0,05$; д) $0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6$; е) $0,08 \cdot 0,08$;
 ж) $(0,5 + 0,2)^2$; з) $(0,7 + 0,3)^3$; и) $(0,9 - 0,4)^3$;
 к) $0,8 + 1,1^2$; л) $1,2^2 - 1,2$; м) $1,5^2 - 0,25$.
- 803.** а) $9,51 \cdot 18$; б) $66,3 \cdot 26$; в) $8,47 \cdot 0,64$;
 г) $7,3 \cdot 5,42$; д) $0,85 \cdot 2,06$; е) $8,07 \cdot 0,016$.
- 804.** а) $3,32 \cdot 0,101$; б) $3,02 \cdot 6,48$; в) $3,21 \cdot 0,562$;
 г) $95,5 \cdot 3,17$; д) $0,861 \cdot 0,242$; е) $0,999 \cdot 0,732$.
- 805.** а) $7,668 \cdot 24 - 9,68$; б) $35,22 + 45,83 \cdot 2,6$;
 в) $5,306 \cdot 42 + 5,36 \cdot 82$; г) $1,654 \cdot 3,4 + 6,4 \cdot 9,5$;
 д) $2,4 \cdot 98 + 4,8$; е) $35,4 \cdot 1,99 + 35,4$;
 ж) $3,2 \cdot 103 - 9,6$; з) $1,22 \cdot 97 + 3,66$.
- 806.** Известно, что $8 \cdot 125 = 1000$. Вычислите:
 а) $8 \cdot 12,5$; б) $0,08 \cdot 125$; в) $0,8 \cdot 12,5$;
 г) $8 \cdot 0,125$; д) $0,8 \cdot 1,25$; е) $0,08 \cdot 12,5$.
- 807.** Пешеход идёт со скоростью 4,4 км/ч. Какой путь он пройдёт за:
 а) 2 ч; б) 0,5 ч; в) 1,5 ч?
- 808.** Собственная скорость моторной лодки 12,6 км/ч, а скорость течения реки 1,8 км/ч. Какой путь пройдёт лодка по течению и против течения за:
 а) 3 ч; б) 2,5 ч; в) 0,5 ч?



- 809.** Вычислите площадь прямоугольника со сторонами a и b :
 а) $a = 3,6$ см, $b = 4$ см; б) $a = 5$ дм, $b = 3,13$ дм;
 в) $a = 3,12$ дм, $b = 3,5$ дм; г) $a = 6,25$ м, $b = 1,6$ м.
- 810.** Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда, длина, ширина, высота которого a , b , c :
 а) $a = 4,5$ см, $b = 2,3$ см, $c = 10$ см;
 б) $a = 3,2$ дм, $b = 1,5$ дм, $c = 2,5$ дм;
 в) $a = 12$ см, $b = 2,5$ дм, $c = 10$ см.
- 811.** Масса 1 м^3 воздуха $1,29$ кг. Определите массу воздуха в вашем классе.
- 812.** Масса 1 см^3 алюминия $2,7$ г, масса 1 см^3 свинца $11,3$ г. Какой кубик тяжелее — алюминиевый с ребром 3 см или свинцовый с ребром 2 см?
- 813.** Использование 1 т макулатуры позволяет получить $0,7$ т бумаги и заменить при этом $4,4 \text{ м}^3$ древесины. Сколько бумаги можно получить из $7,5$ т макулатуры? Сколько при этом экономится древесины?

4.6. Деление положительных десятичных дробей

Вычисление частного двух положительных десятичных дробей можно свести к вычислению частного равных им обыкновенных дробей. Поясним это на примерах.

Пример 1. Найдём частное $0,4 : 0,3$.

Применяя правило деления обыкновенных дробей, имеем:

$$0,4 : 0,3 = \frac{4}{10} : \frac{3}{10} = \frac{4 \cdot 10}{10 \cdot 3} = \frac{4}{3}.$$

Пример 2. Найдём частное $0,072 : 0,4$.

Применяя правило деления обыкновенных дробей, имеем:

$$0,072 : 0,4 = \frac{72}{1000} : \frac{4}{10} = \frac{72 \cdot 10}{1000 \cdot 4} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}.$$

Таким образом, частное двух десятичных дробей всегда можно записать в виде обыкновенной дроби. Заметим, что во втором примере частное можно записать ещё и в виде десятичной дроби $0,18$. Поскольку не любая обыкновенная дробь может быть записана как десятичная, то не всегда частное десятичных дробей можно записать в виде десятичной дроби.

В этом пункте будет рассмотрено деление десятичных дробей лишь в тех случаях, когда их частное есть натуральное число или десятичная дробь. Другие случаи будут рассмотрены в следующей главе.

Будем делить десятичные дроби уголком практически по тем же правилам, что и при делении натуральных чисел. Рассмотрим сначала деление десятичной дроби на натуральное число.

Пример 3. Найдём частное $47,8 : 2$.

Разделим $47,8$ на 2 , рассуждая следующим образом: сначала 4 десятка делим на 2 , получаем 2 десятка. Затем 7 единиц делим на 2 , получаем 3 единицы и остаток 1 . Деление целой части закончено — в частном ставим запятую. Теперь 1 единицу раздробляем в 10 десятых, сносим 8 десятых и 18 десятых делим на 2 , получаем 9 десятых. Так как остаток равен нулю, то деление закончено.

Итак, получен ответ:

$$47,8 : 2 = 23,9.$$

Этот пример подтверждает правильность следующего правила:

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натуральных чисел, но после окончания деления целой части десятичной дроби надо в частном поставить запятую.

Теперь рассмотрим деление десятичной дроби на десятичную дробь.

Пример 4. Вычислим частное $4,42 : 0,2$.

Так как в делителе одна цифра после запятой, то достаточно перенести запятые в делимом и делителе на одну цифру вправо. Тем самым и делимое, и делитель увеличиваются в 10 раз. Поэтому частное не изменится, а делитель будет натуральным числом.

Итак,

$$4,42 : 0,2 = 44,2 : 2.$$

Можно рассуждать и таким образом:

$$4,42 : 0,2 = \frac{4,42}{0,2} = \frac{4,42 \cdot 10}{0,2 \cdot 10} = \frac{44,2}{2}.$$

Дальше деление выполняется уголком по правилу деления десятичной дроби на натуральное число.

Приведём ещё один пример.

4	7	8	2	
4			2	3,9
7				
6				
1		8		
1		8		
0				

а)

315	25
25	12
65	
50	
15	

б)

315,0	25
25	12,6
65	
50	
150	
150	
	0

Рис. 84

Пример 5. Вычислим частное $3,15 : 0,25$.

Так как в делимом и делителе две цифры после запятой, то перенесём запятые в делимом и делителе на две цифры вправо, т. е. умножим делимое и делитель на 100:

$$3,15 : 0,25 = 315 : 25.$$

Выполним деление уголком. После того как закончилось деление целой части (рис. 84, а), ставим в делимом запятую и приписываем 0 десятых, в частном тоже ставим запятую, сносим 0 и продолжаем деление (рис. 84, б).

Эти примеры подтверждают правило:

чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо в делимом и в делителе перенести запятую на столько цифр вправо, сколько их после запятой в делителе, и затем выполнить деление на натуральное число.

814. Выразите частное в виде обыкновенной дроби:

- а) $3 : 0,7$; б) $3,5 : 1,2$; в) $1,25 : 1,4$.

815. По какому правилу делят десятичную дробь на натуральное число?

816. По какому правилу делят десятичные дроби?

817. Всегда ли при делении десятичных дробей частное можно записать в виде десятичной дроби? Приведите примеры.

Вычислите (818–821):

- 818.** а) $12,5 : 10$; б) $72,6 : 100$; в) $173,56 : 100$;
г) $0,3 : 100$; д) $0,73 : 1000$; е) $1,664 : 10\,000$.

- 819.** а) $783 : 10$; б) $988 : 100$; в) $54\,000 : 10\,000$;
г) $7800 : 1000$; д) $3 : 1000$; е) $5 : 100\,000$.

- 820.** а) $3,6 : 3$; б) $75,5 : 5$; в) $1,24 : 4$;
г) $2,53 : 11$; д) $7,81 : 11$; е) $13,2 : 24$.

- 821.** а) $0,48 : 8$; б) $0,84 : 21$; в) $0,001 : 5$;
г) $0,002 : 4$; д) $0,125 : 25$; е) $0,0625 : 25$.

- 822.** Выполните деление и проверьте полученный результат:
а) $3,1 : 0,1$; б) $7,21 : 0,01$; в) $6,3571 : 0,01$;
г) $4,729 : 0,001$; д) $4,29 : 0,1$; е) $7,1 : 0,001$.

Вычислите (**823—824**):

- 823.** а) $6 : 0,1$; б) $7 : 0,001$; в) $8 : 0,001$;
г) $35 : 0,1$; д) $49 : 0,01$; е) $56 : 0,001$.

- 824.** а) $1 : 0,2$; б) $1 : 0,25$; в) $1 : 0,125$; г) $1 : 0,4$; д) $1 : 0,5$.

- 825.** Как изменится частное, если:
а) делимое увеличить в 5 раз;
б) делитель увеличить в 3 раза;
в) делимое и делитель увеличить в одинаковое число раз?

Вычислите (**826—827**):

- 826.** а) $48 : 4,8$; б) $536 : 5,36$; в) $921 : 92,1$;
г) $39 : 0,39$; д) $4 : 0,4$; е) $999 : 99,9$.

- 827.** а) $53,6 : 5,36$; б) $5,36 : 0,01$; в) $72,34 : 7,234$;
г) $7,234 : 0,01$; д) $372,9 : 3,729$; е) $3,729 : 0,1$.

Выполните деление, проверьте результат (**828—829**):

- 828.** а) $4 : 0,5$; б) $3 : 0,2$; в) $2 : 0,02$;
г) $14 : 0,07$; д) $12 : 0,004$; е) $10 : 0,005$.

- 829.** а) $7,6 : 0,2$; б) $6,3 : 0,3$; в) $0,64 : 3,2$;
г) $0,49 : 0,7$; д) $0,01 : 0,05$; е) $0,004 : 0,8$.

Вычислите (**830—833**):

- 830.** а) $0,21 : 0,84$; б) $0,19 : 0,095$; в) $3,76 : 0,4$;
г) $7,05 : 1,5$; д) $3,5 : 0,4$; е) $25,9 : 3,7$.
- 831.** а) $1,75 : 1,4$; б) $18,4 : 7,36$; в) $16,92 : 4,23$;
г) $86,1 : 2,46$; д) $21,875 : 3,125$; е) $183,96 : 5,256$.

- 832.** а) $0,25 : 4 + 15,3 : 5 + 12,4 : 8 + 0,15 : 3$;
б) $96,7 : 10 + 0,045 : 5 + 140,4 : 12 + 1,53 : 15$.

- 833.** а) $4,912 : 16 + (18,305 : 7 + 0,0368 : 4)$;
б) $72,492 : 12 + 78,156 : 36 - 120,03 : 15$;
в) $1,35 : 2,7 + 6,02 - 5,9 + 0,4 : 2,5 \cdot (4,2 - 0,075)$;
г) $4,3 - 3,5 + 1,44 : 3,6 + 3,6 : 1,44 \cdot (0,1 - 0,02)$.

- 834.** Сколько сотых содержится в числе:

- а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{7}{20}$; д) $\frac{3}{25}$?

- 835.** Не выполняя вычислений, сравните:
 а) $19,95 \cdot 199,6$ и $1,995 \cdot 1996$; б) $19,96 \cdot 1,997$ и $199,6 \cdot 19,97$;
 в) $199,7 \cdot 199,8$ и $1,997 \cdot 1,998$; г) $1,998 \cdot 199,9$ и $1,998 \cdot 1999$.

Придумываем задачу

- 836.** Не выполняя вычислений, объясните, почему верно равенство
 $35,48 \cdot 2,937 = 0,3548 \cdot 293,7$.
 Придумайте несколько аналогичных верных равенств.
- 837.** Не выполняя вычислений, объясните, почему верно неравенство
 $2,318 \cdot 12,547 > 23,17 \cdot 1,2547$.
 Придумайте несколько аналогичных верных неравенств.

- 838.** Вычислите:
- | | |
|--|--|
| а) $\frac{12,3 \cdot 3,21}{1,23 \cdot 32,1}$ | б) $\frac{0,123 \cdot 321}{1,23 \cdot 32,1}$ |
| в) $\frac{12,3 \cdot 3,21}{1,23 \cdot 3,21}$ | г) $\frac{0,123 \cdot 0,321}{1,23 \cdot 3,21}$ |



- 839.** На прямолинейном участке железнодорожного пути уложены рельсы длиной 12,5 м. Сколько рельсов уложено на 1 км пути?
- 840.** Слон тяжелее бегемота на 0,7 т, а их общая масса 8,3 т. Какова масса каждого животного?
- 841.** Вычислите скорость движения пешехода, который:
 а) за 2,4 ч прошёл 10,8 км; б) за 1,8 ч прошёл 9,9 км.
- 842.** На производство 1 т бумаги расходуется 250 т воды. Это в 12,5 раза больше, чем расходуется на производство 1 т стали, и в 6 раз меньше, чем на производство 1 т аммиака. Сколько тонн воды расходуется на производство 1 т стали? 1 т аммиака?
- 843.** Площадь первой комнаты на $5,2 \text{ м}^2$ больше площади второй комнаты, а сумма их площадей $34,8 \text{ м}^2$. Определите площадь каждой комнаты.
- 844.** Расстояние между двумя пунктами 14,4 км. Пешеход прошёл в 2 раза больше, чем ему осталось пройти. Сколько километров прошёл пешеход?
- 845.** На 66,5 р. купили 4 пачки печенья и 3 коробки конфет. Каждая коробка конфет стоила в 5 раз дороже пачки печенья. Сколько стоила коробка конфет?

- 846.** Из «Сборника задач и упражнений по арифметике» С. А. Пономарёва и Н. И. Сырнева. (Задача-шутка.) Крестьянин поехал на луга за сеном и взял с собой трёх сыновей: 15 лет, 12 лет и 10 лет. Обратный путь в 13,5 км мальчики по очереди ехали на возу, причём расстояние распределили обратно пропорционально возрасту. Сколько километров проехал каждый из них на возу?

Придумываем задачу

- 847.** Придумайте и решите 6 разных задач на движение по реке, в условиях которых были бы использованы десятичные дроби.

Вычислите (848–852):

848. а) $13,7 \cdot 2,2 - 5,9 \cdot 2,2 + 7,8^2$; б) $2,62 \cdot 13,58 + 3,8 \cdot 13,58 + 6,42^2$.

849. а) $\frac{1,476 + 2,08 \cdot 4,05}{49,938 : 24,36 - 0,25}$; б) $\frac{4,58 + 6,275 : 1,25}{49,533 : 16,5 - 2,522}$.

850. а) $\frac{1}{2} + 0,5$; б) $\frac{1}{4} + 0,3$; в) $\frac{2}{5} - 0,4$;

г) $\frac{3}{4} - 0,25$; д) $\frac{7}{25} + 0,13$; е) $\frac{6}{25} - 0,02$.

851. а) $1\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} \cdot 0,2$; б) $1\frac{1}{5} : 1,6 - \frac{4}{5} \cdot 0,125$;

в) $4\frac{1}{2} \cdot 0,4 : 0,15 \cdot 1\frac{2}{3}$; г) $3\frac{1}{3} \cdot 0,3 + 19 : 0,5 \cdot \frac{1}{4}$.

852. а) $(1\frac{3}{8} + 1\frac{3}{4} - 0,411) : 0,59$; б) $(6\frac{7}{15} - 1,4) : (2\frac{4}{5} + 1,2)$;

в) $12,8 \cdot \frac{1}{4} : (\frac{3}{4} - 0,125)$; г) $1\frac{17}{18} \cdot (3\frac{1}{4} - 2,95) : 3,5$.

853. Решите уравнение:

а) $x - 3\frac{1}{2} = 6,1$; б) $2,5x + 6,3 = 7\frac{1}{3}$;

в) $2\frac{2}{3}x - 5,1 = 3,7$; г) $1,5x + 2\frac{1}{3} = 2,5$.

854. Решите пропорцию:

а) $\frac{x}{4,9} = \frac{1,5}{2,1}$; б) $\frac{1,8}{x} = \frac{0,36}{3,2}$; в) $\frac{2,7}{25} = \frac{x}{1,25}$;

г) $x : 4,2 = \frac{3}{2} : 6,3$; д) $x : 3,8 = \frac{4}{5} : 1,9$; е) $2,5 : x = 3\frac{1}{3} : 1,2$;

ж) $2\frac{1}{3} : x = 3,5 : 1,5$; з) $2x : 3,5 = 8 : 7$; и) $1,2x : 8 = 0,36 : 5$.

4.7. Десятичные дроби и проценты

Задачи двух основных типов на нахождение процентов данного числа и числа по его процентам можно решать, используя умножение и деление на десятичную дробь.

Задача 1. Найти 13 % от 60 м.

Решение. 13 % от 60 м равны $\frac{13}{100}$, или 0,13 от 60 м, поэтому
 $60 \cdot 0,13 = 7,8$ (м).

Ответ: 7,8 м.

Задача 2. Найти число, 35 % которого равны 700.

Решение. Число 700 составляет 35 %, или $\frac{35}{100}$, или 0,35 от неизвестного числа. Найдём это число:

$$700 : 0,35 = 2000.$$

Ответ: 2000.

Задача 3. Из 40 посаженных семян взошли 37. Определите процент всхожести семян.

Решение. Всхожесть семян составляет $\frac{37}{40}$, или

$$\frac{37 \cdot 100}{40} \cdot \frac{1}{100} = 92,5 \cdot \frac{1}{100}, \text{ т. е. } 92,5 \%,$$

или короче: $\frac{37 \cdot 100}{40} \% = 92,5 \%$.

Ответ: 92,5 %.

Задача 4. Сколько процентов составляет число 3 от числа 7?

Решение. 3 от 7 составляет $\frac{3}{7}$, или $\frac{3 \cdot 100}{7} \cdot \frac{1}{100} = \frac{300}{7} \cdot \frac{1}{100} =$
 $= 42 \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{100}$, т. е. $42 \frac{6}{7} \%$, или короче:

$$\frac{3 \cdot 100}{7} \% = \frac{300}{7} \% = 42 \frac{6}{7} \%$$

Ответ: $42 \frac{6}{7} \%$.

855. Найдите 27 % числа:

- а) 200; б) 290; в) 45; г) 38.

856. Найдите число, 27 % которого равны:

- а) 540; б) 300; в) 243; г) 2727.

857. Сколько процентов числа 350 составляет число:

- а) 35; б) 385; в) 315; г) 679?

858. Масса сушёных яблок составляет 25 % массы свежих. Сколько сушёных яблок получили из 200 кг; 360 кг; 4,5 т свежих? Сколько процентов массы свежих яблок теряется при сушке?



859. Виноград при сушке теряет 65 % своей массы. Сколько изюма (сушёного винограда) получится из 400 кг; 350 кг; 1,8 т свежего винограда?

860. Трава при сушке теряет 85 % своей массы.
а) Сколько сена получится из 600 кг; 1500 кг; 11,8 т свежей травы?
б) Сколько травы надо накопить, чтобы насушить 1500 кг; 3300 кг; 3,6 т сена?

861. Что больше:
а) 45 % от 72 или 72 % от 45; б) 38 % от 80 или 60 % от 45?

862. Товар стоил 150 р. Его цена повысилась на 12 %. Сколько теперь стоит этот товар?

863. Увеличьте число:
а) 80 на 20 %; б) 480 на 25 %;
в) 50 на 10 %; г) 25 на 100 %.

864. Уменьшите число:
а) 60 на 10 %; б) 500 на 28 %;
в) 90 на 50 %; г) 125 на 40 %.

865. Можно ли цену товара:
а) увеличить на 101 %; б) уменьшить на 101 %?

4.8*. Сложные задачи на проценты

Для решения более сложных задач на проценты полезно освоить увеличение и уменьшение числа на заданное число процентов с помощью умножения на десятичную дробь.

Задача 1. Цену товара увеличили на 10 %, затем снизили на 10 %. Сколько процентов составляет новая цена от первоначальной?

Решение. Пусть первоначальная цена товара составляет a р. Увеличим её на 10 %:

$$a + 0,10a = (1 + 0,10)a = 1,10a \text{ (р.)}$$

Как видим, чтобы увеличить цену на 10 %, можно умножить её на 1,10.

Аналогично, чтобы уменьшить цену на 10 %, нужно умножить её на $1 - 0,10 = 0,90$.

Уменьшим цену $1,10a$ р. на 10 %:

$$0,90 \cdot 1,10a = 0,99a \text{ (р.)}$$

Итак, новая цена товара составляет 0,99, или 99 % от первоначальной цены.

Ответ: 99 %.

Задача 2. Вкладчик положил в банк 40 000 р. Банк начисляет ежемесячно 5 % дохода на сумму первоначального вклада. Какой доход получит вкладчик за 3 месяца?

Решение. Доход за первый месяц составит $0,05 \cdot 40\,000 = 2000$ (р.). Так как каждый месяц доход начисляется на одну и ту же сумму 40 000 р., то доход за 3 месяца составит $3 \cdot 2000 = 6000$ (р.).

Ответ: 6000 р.

Задача 3. Вкладчик положил в банк a р. Банк начисляет ежемесячно p % дохода на сумму первоначального вклада. Какая сумма S окажется на счёте вкладчика через n месяцев?

Решение. Доход за каждый месяц составит $\frac{p}{100} \cdot a$ р. За n месяцев вклад увеличится на $n \cdot \frac{p}{100} \cdot a$ р. и составит сумму

$$S = a + n \cdot \frac{p}{100} \cdot a = a \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right) \text{ (р.)}$$

Ответ: $a \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$ р.

Если проценты начисляют на постоянную сумму (как в задачах 2 и 3), то говорят, что начисляют **простые проценты**, а формулу $S = a \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$ называют **формулой простых процентов**.

Задача 4. Вкладчик положил в банк 40 000 р. Банк начисляет ежемесячно 5 % дохода на сумму вклада, находящуюся на счёте вкладчика к началу месяца. Какой доход получит вкладчик за 3 месяца?

Решение. За первый месяц доход составит

$$0,05 \cdot 40\,000 = 2000 \text{ (р.)}$$

и на вкладе окажется 42 000 р. За второй месяц доход составит

$$0,05 \cdot 42\,000 = 2100 \text{ (р.)}$$



и на вкладе окажется 44 100 р. За третий месяц доход составит

$$0,05 \cdot 44\,100 = 2205 \text{ (р.)},$$

и на вкладе окажется 46 305 р.

Тогда доход за 3 месяца составит $46\,305 - 40\,000 = 6305$ (р.).

Ответ: 6305 р.

Задача 5. Вкладчик положил в банк a р. Банк начисляет ежемесячно $p\%$ дохода на сумму вклада, находящуюся на счёте вкладчика к началу месяца. Какая сумма S окажется на счёте вкладчика через n месяцев?

Решение. За первый месяц вклад составит $a + \frac{p}{100} \cdot a = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ (р.), т. е. увеличится в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раза. За второй месяц вклад увеличится ещё в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раза, а за два месяца — в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ раза. За третий месяц вклад увеличится ещё в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раза, а за три месяца — в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$ раза и т. д.

За n месяцев вклад увеличится в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ раза и составит сумму $S = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ р.

Ответ: $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ р.

Если проценты начисляют на изменяющуюся сумму (как в задачах 4 и 5), то говорят, что начисляют сложные проценты, а формулу $S = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ называют формулой сложных процентов.

866. Число 200 увеличили на 20 %, полученный результат уменьшили на 20 %. Получится ли в результате число 200? Какое число получится?

867. а) Число a увеличили на 20 %, полученное число увеличили ещё на 20 %. Во сколько раз увеличилось число a ? На сколько процентов увеличилось число a за два раза?

б) Цену товара уменьшили на 10 %, полученную цену уменьшили ещё на 10 %. На сколько процентов уменьшили цену товара за два раза?

- 868.** а) Число a больше числа b в 1,25 раза; в 1,32 раза; в 1,5 раза. На сколько процентов число a больше числа b ?
 б) Число a больше числа b на 25 %; на 48 %; на 60 %. Во сколько раз число a больше числа b ?
- 869.** а) Некоторую сумму положили в банк под 20 % годовых. Во сколько раз увеличится вложенная сумма за 5 лет, если начисляют простые проценты?
 б) Некоторую сумму положили в банк под 20 % годовых. Во сколько раз увеличится вложенная сумма за 4 года, если начисляют сложные проценты?
- 870.** Сбербанк России с 1 октября 1993 года начислял доход из расчёта: 150 % за хранение денег в банке в течение года; 65 % за хранение денег в банке в течение 6 месяцев; 30 % за хранение денег в банке в течение 3 месяцев. Каким образом при этих условиях можно было получить наибольший доход на сумму 100 000 р.? Каков этот наибольший доход?
- *871.** Компания X выплачивает доход по своим акциям ежегодно из расчёта 40 % годовых. Компания Y выплачивает доход по акциям 1 раз в полгода из того же расчёта. В акции какой компании выгоднее вложить деньги на 1 год?
- *872.** Обломов похудел на 25 %, потом прибавил в весе на 20 %, похудел на 10 %, потом прибавил в весе на 20 %. Прибавил Обломов в весе или похудел?
- *873.** Служащая фирмы сказала: «Производство продукции нашей фирмы увеличится на 200 %, или в 2 раза». Исправьте её ошибку, если верно условие: а) на 200 %; б) в 2 раза.
- *874.** Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилась его площадь? Зависит ли результат от того, какую пару сторон увеличили на 10 %?
- *875.** а) Все стороны прямоугольника увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилась его площадь?
 б) Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на 20 %, две другие — уменьшили на 20 %. Как изменилась площадь прямоугольника?
- *876.** Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на 20 %, две другие — уменьшили на 10 %. На сколько процентов увеличилась площадь прямоугольника?
- *877.** Длину прямоугольника уменьшили на 20 %. На сколько процентов надо увеличить ширину прямоугольника, чтобы его площадь не изменилась?



- *878.** В драмкружке число мальчиков составляет 80 % от числа девочек. Сколько процентов составляет число девочек от числа мальчиков в этом кружке?
- 879.** Имеется 600 г раствора, содержащего 15 % соли. Сколько воды требуется добавить в раствор, чтобы он стал содержать 10 % соли?
- 880.** Сколько граммов воды нужно добавить к 120 г раствора, в котором содержится 30 % сахара, чтобы получить раствор, содержащий 20 % сахара?
- *881.** Кусок сплава массой 700 г, содержащий 80 % олова, сплавил с куском олова весом 300 г. Определите процентное содержание олова в полученном сплаве.
- *882.** Имеется 500 г раствора, содержащего 40 % кислоты. Сколько воды требуется добавить в раствор, чтобы он стал содержать 25 % кислоты?
- *883.** В первый день рабочий перевыполнил дневное задание на 2 %, во второй день он перевыполнил дневное задание на 4 %. На сколько процентов рабочий перевыполнил задание двух дней?
- *884.** В спортивной секции девочки составляют 60 % числа мальчиков. Сколько процентов числа всех участников секции составляют девочки?

4.5. Десятичные дроби произвольного знака

Напомним, что десятичная дробь — другая форма записи обыкновенной дроби. Любое свойство обыкновенных дробей переносится на десятичные дроби.

В частности, если перед положительной десятичной дробью поставить знак «+», то получится равная ей дробь, потому что если поставить знак «+» перед равной ей обыкновенной дробью, то это не изменяет её. Например, $2,78 = +2,78$; $3,99 = +3,99$.

Если перед положительной десятичной дробью поставить знак «-», то получим другую — противоположную ей отрицательную дробь. Например,

$$0,9 = \frac{9}{10}, \quad -0,9 = -\frac{9}{10}; \quad 2,71 = 2\frac{71}{100}; \quad -2,71 = -2\frac{71}{100}.$$

Все арифметические действия с десятичными дробями произвольного знака производятся так же, как действия с целыми числами: сначала надо определить знак результата действия, а потом произвести соответствующее действие с их модулями — положительными десятичными дробями. Например,

$$\begin{aligned} 3,2 + (-3,4) &= -(3,4 - 3,2) = -0,2; \\ 5,8 - 8,9 &= -(8,9 - 5,8) = -3,1; \\ 7,8 \cdot (-0,5) &= -(7,8 \cdot 0,5) = -3,9; \\ (-4,2) : (-0,6) &= +(4,2 : 0,6) = 42 : 6 = 7. \end{aligned}$$

Вычислите (885—891):

- 885.** а) $2,1 + (-3,5)$; б) $(-4,9) + (-1,3)$; в) $4,8 - 9,9$;
 г) $6,2 - (-1,7)$; д) $-7,9 - (-1,8)$; е) $-1,2 - 3,5$.
- 886.** а) $1,56 + (-8,28)$; б) $-7,53 - 6,48$; в) $-13,75 - 5$;
 г) $12,51 - 17,23$; д) $12,285 - 13,999$; е) $13,4 - 17,48$.
- 887.** а) $(-1,2) \cdot 5$; б) $(-4,9) : 7$; в) $(-6,4) : (-0,8)$;
 г) $72 : (-0,6)$; д) $(-4,8) : 0,16$; е) $(-1,28) : (-6,4)$.
- 888.** а) $4,16 - 5,1 \cdot 3,2$; б) $7,39 - 1,21 : 1,1$;
 в) $(-44,44) : 11 + 1,1$; г) $(-6,25) : 2,5 + 2,5$;
 д) $0,48 : 1,6 - 4,8$; е) $12,5 \cdot (-4) : (-2)$.
- 889.** а) $44 : (-2,5) - 6 \cdot (4,3 - 0,8 - 3,7)$;
 б) $(-11,2 : (-2,8) - 3,6 + 2,4) : (-0,4)$;
 в) $-3,6 \cdot (-0,5) - (-3,2 + 0,8) \cdot 1,05$.
- 890.** а) $(4,28 + 3,6 \cdot (-0,85)) : (-0,4)$; б) $7,68 - 6,4 : (-1,2 - 0,4)$;
 в) $(4,7 + 2,3) \cdot (-3,5) - 8,7 + 0,3$; г) $5,41 - 8,1 : (3,6 - 6,3)$.
- 891.** а) $(0,05 - 2,2 + 0,53) : 1,8 + 0,4$;
 б) $0,2 \cdot (0,4 - 1,08 + 0,15) + 0,2$;
 в) $(0,4 \cdot 0,01 - 0,01) : 0,25 - 0,231$;
 г) $-0,8 + 4,2 \cdot (0,002 : 0,04 - 4,1)$.
- 892.** Решите уравнение:
 а) $0,4x = 3$; б) $2x = 1,8$; в) $0,3x = -2,7$;
 г) $1,5x = -10,5$; д) $-0,002x = 25$; е) $-1,4x = 2,842$.
- Вычислите (893—895):
- 893.** а) $(-654,84 : 32,1 - 35,568 : (-3,42)) : 2,5$;
 б) $(-3,17 - 25,9632 : 4,32) : (-74,358 : 24,3)$;
 в) $(2763,36 : (-30,4) - 70,7) : (714,07 : 7,07)$.
- 894.** а) $\left(2,75 : 3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{3} : 1,75\right) \cdot 3\frac{2}{21}$; б) $\left(3,24 : \frac{9}{7} - 3\frac{1}{5} : 1\frac{1}{3}\right) : (-0,9)$;
 в) $(-4,5) \cdot 5\frac{1}{3} + (-5,5) \cdot 5\frac{1}{3}$; г) $3\frac{1}{7} \cdot 7,425 + (-6,425) \cdot 3\frac{1}{7}$.

*895.

$$а) \frac{-0,125 \cdot 5}{\left(1\frac{28}{63} - \frac{17}{21}\right) \cdot 7\frac{7}{8}};$$

$$б) \frac{\left(\frac{21}{40} - \frac{19}{24}\right) \cdot 0,7 + 0,04}{0,675 \cdot 3,4 - 2,02};$$

$$в) \frac{\left(13,25 - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6}\right) \cdot 230,04 + 46,75}{\left(1\frac{3}{7} + 3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(12\frac{1}{3} - 14\frac{2}{7}\right)}.$$

4.10. Приближение десятичных дробей

Если число a_1 мало отличается от числа a , то пишут

$$a \approx a_1$$

и говорят, что число a приближённо равно числу a_1 или что a_1 есть приближение числа a . Знак « \approx » есть знак приближённого равенства.

Если при этом $a_1 < a$, то a_1 называют приближением a с недостатком (или приближением снизу). Если же $a_1 > a$, то a_1 называют приближением a с избытком (или приближением сверху).

Если случится, что $a_1 = a$, то a_1 можно назвать как приближением a снизу, так и сверху.

Десятичные дроби с большим числом знаков после запятой приближают конечными десятичными дробями с меньшим числом знаков. Сама конструкция десятичной дроби подсказывает, как эти приближения подбирать.

Рассмотрим пример. Пусть $a = 2,32825$.

Оборвём эту дробь на цифре второго разряда после запятой. Получим число 2,32, меньшее чем a .

Если у числа 2,32 увеличить цифру разряда сотых на единицу, то получим число 2,33, уже большее чем a .

Таким образом, $2,32 < a < 2,33$, поэтому 2,32 есть приближение числа a снизу, а 2,33 есть его же приближение сверху. Пишут при этом

$$a \approx 2,32, a \approx 2,33$$

и говорят: «2,32 есть приближение числа a с точностью до одной сотой с недостатком (снизу); 2,33 есть приближение числа a с точностью до одной сотой с избытком (сверху)».

Вместо слов «с точностью до одной сотой» говорят ещё «с точностью до единицы второго разряда после запятой».

Так как третья цифра после запятой у числа a больше 5, то оно ближе к 2,33, чем к 2,32. Поэтому говорят, что 2,33 есть приближение a с точностью до одной сотой с округлением.

Рассуждая аналогично, получим, что

$$2,328 < a < 2,329, \\ a \approx 2,328, a \approx 2,329,$$

где 2,328 есть приближение a с точностью до одной тысячной (до 0,001) снизу и в то же время с округлением. Это следует из того, что цифра четвертого разряда после запятой меньше 5, поэтому a ближе к 2,328, чем к 2,329.

2,329 есть приближение a с точностью до 0,001 сверху.

Аналогично $2,3282 < a < 2,3283$. Теперь число a находится в точности посередине между приближениями снизу и сверху. Таким образом, 2,3283 есть приближение a с точностью до 0,0001 сверху и в то же время с округлением.

Подобным образом для числа $b = -2,32829$ имеют место неравенства $-2,33 < b < -2,32$, откуда $b \approx -2,33$, $b \approx -2,32$ и при этом $-2,33$ есть приближение b с точностью до 0,01 снизу и в то же время с округлением; $-2,32$ есть приближение числа b с точностью до 0,01 сверху.

Введём понятие значащей цифры десятичной дроби.

Значащей цифрой десятичной дроби называют её первую (слева направо) отличную от нуля цифру, а также все следующие за ней цифры.

Например,

в числе 235 000 все цифры значащие;

в числе 0,302 цифры, стоящие после запятой, значащие;

в числе 0,003004 цифры, начиная с цифры 3, значащие.

Округлить число с точностью, например, до третьей значащей цифры — это значит округлить его до того разряда, где находится третья значащая цифра, заменив следующие цифры нулями. Приведённые ниже округления произведены с точностью до третьей значащей цифры:

$$3,7523 \approx 3,7500 = 3,75;$$

$$-0,010278 \approx -0,010300 = -0,0103;$$

$$0,035021 \approx 0,035000 = 0,0350;$$

$$-0,02339 \approx -0,0234;$$

$$235\,000 \approx 235\,000 = 2,35 \cdot 10^5;$$

$$2\,365\,780 \approx 2\,370\,000 = 2,37 \cdot 10^6.$$

896. Что показывает знак « \approx »? Как читают запись $a \approx a_1$?

897. Назовите приближение числа 0,2638:

- с недостатком с точностью до одной десятой;
- с избытком с точностью до одной сотой;
- с округлением с точностью до одной тысячной.

898. Какие цифры называют значащими в записи числа в виде десятичной дроби?

899. Что значит округлить число с точностью до второй значащей цифры?

900. Найдите приближение числа a с недостатком с точностью до единицы третьего разряда после запятой:

а) $a=0,3456$; б) $a=0,76543$; в) $a=0,02325$; г) $a=-0,34354$.

901. Найдите приближение числа a с избытком с точностью до единицы второго разряда после запятой:

а) $a=1,2345$; б) $a=3,56789$; в) $a=2,577$; г) $a=2,555$.

902. Округлите число a с точностью до 0,01:

а) $a=1,24851$; б) $a=1,24158$; в) $a=-7,02303$; г) $a=0,12528$.

903. Округлите число a с точностью до 0,001:

а) $a=8,91011\dots$; б) $a=-8,91011\dots$;

в) $a=0,2626$; г) $a=0,6265$.



904. Подчеркните значащие цифры числа:

а) 3,52; б) 0,352; в) 0,03520; г) 7,405;
д) 4,203; е) 0,005; ж) 0,0420; з) 7,0003;
и) 10,0050; к) 6,700; л) 0,00067; м) 0,0100.

905. Округлите число 1995,1996:

а) до десятых; б) до сотых; в) до тысячных;
г) до единиц; д) до десятков; е) до сотен.

906. Округлите число 1039,9301 до семи; шести; пяти; четырёх; трёх значащих цифр.

4.11. Приближение суммы, разности, произведения и частного двух чисел

Сумма (разность, произведение, частное) двух чисел считается приближённо равной сумме (разности, произведению, частному) их приближений.

Чтобы правильно приближённо складывать, вычитать, умножать и делить числа, надо правильно их округлять. Как это делать, мы поясним для чисел, записанных в виде десятичных дробей.

Чтобы вычислить приближённо сумму (или разность) двух чисел, надо округлить эти числа с одинаковой точностью, например до одной сотой, затем сложить (или вычесть) полученные приближения.

Пример 1. Найдём приближённо сумму и разность чисел

$$a = 23,1834567 \text{ и } b = -4,2375,$$

округлив их с точностью до одной сотой.

Решение. Округляя эти числа с точностью до одной сотой, находим, что $a \approx 23,18$, $b \approx -4,24$. Откуда и получаем ответ:

$$a + b \approx 18,94; \quad a - b \approx 27,42.$$

Отметим, что аналогично выполняют сложение и вычитание чисел, округлённых с точностью до одной десятой, до одной тысячной, до десятков, до тысяч и т. д.

Сформулируем правило приближённого умножения и деления чисел, округлённых с точностью до третьей значащей цифры (аналогично выполняют приближённое умножение и деление чисел, округлённых с точностью до первой, второй и т. д. значащей цифры).

Чтобы вычислить приближённо произведение (или частное) двух чисел, надо округлить эти числа с точностью до одной и той же значащей цифры (например, до третьей значащей цифры), перемножить (или разделить) полученные приближения и результат округлить до той же (третьей) значащей цифры.

Пример 2. Пусть $a = 135,78665$, $b = 0,0068751$.

Вычислим $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ приближённо, округляя числа a и b с точностью до третьей значащей цифры.

Решение. Округлив с точностью до третьей значащей цифры, имеем: $a \approx 136$, $b \approx 0,00688$, тогда

$$a \cdot b \approx 136 \cdot 0,00688 = 0,93568 \approx 0,936;$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{136}{0,00688} = \frac{13\,600\,000}{688} = 19\,767,4\dots \approx 19\,800 = 1,98 \cdot 10^4;$$

$$\frac{b}{a} \approx \frac{0,00688}{136} = 0,00005058\dots \approx 0,0000506.$$

○ **Замечание.** Точность вычислений находится в противоречии с простотой вычислений. Большая точность связана с употреблением большего количества цифр, меньшая — требует меньшего количества цифр.

Чем с большим количеством цифр брать приближения двух чисел, тем ближе будет сумма (разность, произведение, частное) этих приближений к сумме (разности, произведению, частному) этих чисел.

Например, пусть дано число $a = 1,445$ и требуется вычислить его квадрат.

Если округлим число и результат до первой значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1 \cdot 1 = 1$, что отличается от точного результата (2,088025) примерно на 52 %.

Если округлим число и результат до второй значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1,4 \cdot 1,4 = 1,96 \approx 2,0$, что отличается от точного результата примерно на 4,2 %.

Если же округлим число и результат до третьей значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1,45 \cdot 1,45 = 2,1025 \approx 2,10$, что отличается от точного результата меньше, чем на 0,6 %.

907. Сформулируйте правило приближённого сложения двух чисел, заданных десятичными дробями и округлённых с точностью до одной тысячной.

908. Сформулируйте правило приближённого вычитания двух чисел, заданных десятичными дробями и округлённых с точностью до одной десятой.

909. Сформулируйте правило приближённого умножения чисел, заданных десятичными дробями и округлённых с точностью до третьей значащей цифры.

910. Сформулируйте правило приближённого деления чисел, заданных десятичными дробями и округлённых с точностью до четвертой значащей цифры.

911. Округлите числа a и b с точностью до 0,1 и вычислите приближённо их сумму $a + b$ и разность $a - b$:

- а) $a = 3,28$, $b = 0,11$; б) $a = -1,256$, $b = 2,555$;
в) $a = 0,010010$, $b = 0,2$; г) $a = 2,7235$, $b = -3,42426$;
д) $a = -7,17$, $b = -0,33$; е) $a = -6,373$, $b = -8,765$.

912. Округлите числа a и b с точностью до 0,01 и вычислите приближённо их сумму $a + b$ и разность $a - b$:

- а) $a = 1,4545$, $b = -1,203$; б) $a = 2,1264$, $b = -3,1145$;
в) $a = -5,777$, $b = 2,536$; г) $a = 0,5642$, $b = -3,573$;
д) $a = -12,454$, $b = 10,111$; е) $a = -9,5273$, $b = -11,1928$.

913. Округлив числа a и b с точностью до третьей значащей цифры, вычислите приближённо их произведение $a \cdot b$ и частное $a : b$:

- а) $a = -2,435$, $b = 1,923$; б) $a = 2,1456$, $b = 0,78788$;
в) $a = -2,131$, $b = -0,009293$; г) $a = 0,03531$, $b = 357,693$.

914. Округлив числа a и b с точностью до второй значащей цифры, вычислите приближённо их произведение $a \cdot b$ и частное $a : b$:

- а) $a = 0,253$, $b = 0,75$; б) $a = 3,5781$, $b = -0,00494$;
в) $a = -0,045$, $b = -0,593$; г) $a = 382,231$, $b = 0,002434$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1 ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КАЛЬКУЛЯТОРА

Мы уже писали о том, что с помощью калькулятора можно выполнять вычисления с целыми числами.

С помощью калькулятора можно выполнять вычисления и с десятичными дробями. Для ввода запятой используют клавишу $\boxed{\cdot}$.

Например, дробь 3,15 вводят в калькулятор, нажимая на клавиши

$$\boxed{3} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{5}.$$

Дробь 0,135 можно ввести так:

$$\boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{3} \boxed{5}, \text{ или короче: } \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{3} \boxed{5}.$$

При этом с нажатием клавиши $\boxed{0}$ вводится и целая часть дроби (0).

Действия с десятичными дробями выполняются так же, как действия с натуральными числами.

Пример 1. Вычислим сумму $3,15 + 2,488$.

Нажимая на клавиши

$$\boxed{3} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\cdot} \boxed{4} \boxed{8} \boxed{8} \boxed{=},$$

получим ответ: 5,638.

Пример 2. Вычислим разность $0,135 - 0,048$.

Нажимая на клавиши

$$\boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{-} \boxed{\cdot} \boxed{0} \boxed{4} \boxed{8} \boxed{=},$$

получим ответ: 0,087.

Пример 3. Вычислим произведение $0,24 \cdot 1,5$.

Нажимая на клавиши

$$\boxed{\cdot} \boxed{2} \boxed{4} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{\cdot} \boxed{5} \boxed{=},$$

получим ответ: 0,36.

Пример 4. Вычислим частное $48,96 : 0,12$.

Нажимая на клавиши

$$\boxed{4} \boxed{8} \boxed{\cdot} \boxed{9} \boxed{6} \boxed{\div} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{=},$$

получим ответ: 408.



Пример 5. Выразим дробь $\frac{561}{374}$ в виде десятичной дроби.

Так как дробь $\frac{561}{374}$ равна частному $561 : 374$, то выполним вычисления, нажимая на клавиши

$$\boxed{5} \boxed{6} \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{7} \boxed{4} \boxed{=},$$

получим ответ: 1,5.

Пример 6. Выразим дробь $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби.

Нажмём на клавиши

$$\boxed{1} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{=},$$

На табло получится лишь приближённый результат: 0,3333333. В этом легко убедиться, выполнив умножение:

$$0,3333333 \cdot 3 = 0,9999999 \neq 1.$$

Пример 7. Вычислим частное $3,16 : 5,01$.

Нажмём на клавиши

$$\boxed{3} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{\cdot} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{=},$$

получим приближённый результат 0,6307385 (проверьте).

Замечание. В обычный калькулятор можно ввести любое число, записанное в десятичной системе и состоящее из 8 цифр. При этом запятая в десятичной дроби может стоять после любой цифры.

Многие калькуляторы позволяют вести расчёты с запоминанием промежуточных результатов.

Пример 8. Вычислим значение выражения $48 - (90 : 3 - 51)$.

Нажмём на клавиши

$$\boxed{9} \boxed{0} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{1} \boxed{=} \boxed{\Pi+}.$$

Клавишей $\boxed{\Pi+}$ мы запомнили число -21 (результат вычислений в скобках), далее нажимаем на клавиши

$$\boxed{4} \boxed{8} \boxed{-} \boxed{\Pi} \boxed{=}.$$

Клавишей $\boxed{\Pi}$ мы извлекаем число из памяти и вычисляем: $48 - (-21) = 69$.

Перед повторным использованием памяти калькулятора надо очистить память двойным нажатием клавиши $\boxed{\Pi}$ и очистить табло клавишей \boxed{C} , иначе при следующем нажатии клавиш $\boxed{\Pi+}$ и $\boxed{\Pi-}$ калькулятор сложит число, вводимое в память, с тем числом, которое там хранится.

Клавишам $\boxed{\Pi+}$, $\boxed{\Pi-}$, $\boxed{\Pi}$ калькуляторов отечественного производства соответствуют клавиши $\boxed{M+}$, $\boxed{M-}$ и \boxed{MRC} калькуляторов зарубежного производства.

Используя клавишу $\boxed{\Pi-}$, можно запомнить число -21 с противоположным знаком.

$$\boxed{9} \boxed{0} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{1} \boxed{=} \boxed{\Pi-} \boxed{4} \boxed{8} \boxed{+} \boxed{\text{ИП}} \boxed{=}$$

Эти вычисления с помощью калькулятора соответствуют такой последовательности действий:

$$1) 90 : 3 = 30; \quad 2) 30 - 51 = -21; \quad 3) 48 + 21 = 69.$$

При вычислениях с помощью калькулятора память можно использовать многократно для суммирования результатов промежуточных вычислений.

Пример 9. Подсчитаем стоимость покупки, если купили $1,2$ кг конфет по 265 р. за 1 кг, $2,3$ кг печенья по 65 р. за 1 кг и $2,47$ кг яблок по 60 р. за 1 кг.

Решение. Выполним вычисления:

$265 \cdot 1,2 = 318$ и нажмём клавишу $\boxed{\Pi+}$ (запомнили 318),

$65 \cdot 2,3 = 149,5$ и нажмём клавишу $\boxed{\Pi+}$ (к числу $149,5$ прибавили 318 и результат $467,5$ запомнили),

$60 \cdot 2,47 = 148,2$ и нажмём клавиши $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ИП}} \boxed{=}$ (к числу $148,2$ прибавили $467,5$). Окончательный результат $615,7$ р.

Арифметические операции над двумя такими числами (сложение, вычитание, умножение или деление) приводят к ответу, выведенному на табло калькулятора не более чем восемью цифрами. При этом следует учесть:

1) Если ответ выражен не более чем семью цифрами, то результат вычислен точно.

2) Если ответ выражен десятичной дробью с восемью цифрами, то он может быть неточным. Если результат неточный, то на табло даётся его приближение с недостатком (цифры после восьмой отбрасываются без округления). Например, вычислим произведение столбиком: $111,11 \cdot 111,11 = 12\,345,4321$ и с помощью калькулятора: $111,11 \cdot 111,11 = 12\,345,432$.

3) Если ответ выражен натуральным числом с восемью цифрами, то к нему надо отнестись осторожно. Может случиться, что калькулятор получил десятичную дробь с восемью цифрами до запятой и отбросил все цифры после запятой. Например, вычислим произведение столбиком: $11\,111 \cdot 1000,1 = 11\,112\,111,1$ и с помощью калькулятора: $11\,111 \cdot 1000,1 = 11\,112\,111$.

Как видим, калькулятор отбросил единицу после запятой и дал приближённый ответ с точностью до единицы. Здесь по виду ответа на табло нельзя определить, точный он или приближённый.



Вычислите с помощью калькулятора (915–918):

915. а) $3,56 + 7,031$; б) $4,27 - 2,999$; в) $3,25 \cdot 4,8$; г) $8,8 : 0,55$.

916. а) $6,325 + 1,5031$; б) $7,1 - 6,3456$;
в) $6,25 \cdot 1,92$; г) $14,4 : 0,048$.

917. а) $4,295 + 7,35$; б) $7,2391 - 3,957$;
в) $9,58 \cdot 0,45$; г) $7,896 : 0,48$.

918. а) $5,728 \cdot 4,25 - 20,134$; б) $87,162 : 4,38 + 13,78$;
в) $6,236 \cdot 12,5 : 0,625$; г) $0,729 : 0,027 \cdot 3,126$;
д) $14,9445 : 4,05 - 5,69$; е) $0,016 \cdot 0,3125 - 0,05$.

919. С помощью калькулятора найдите приближения обыкновенных дробей с недостатком по образцу:

а) $\frac{6}{9} \approx 0,66666666$; б) $\frac{7}{9}$; в) $\frac{8}{9}$; г) $\frac{1}{9}$;
д) $\frac{13}{99}$; е) $\frac{25}{99}$; ж) $\frac{79}{99}$; з) $\frac{5}{99}$.

920. Вычислите с помощью калькулятора: а) $1 : 9 \cdot 9$; б) $4 : 7 \cdot 7$. Точный или приближённый результат получился? Каков точный ответ?

921. Вычислите с помощью калькулятора: а) $891 : 297$; б) $297 : 891$; в) $999,9999 \cdot 9$; г) $7777,7777 : 1,4$.

2 ПРОЦЕНТНЫЕ РАСЧЁТЫ С ПОМОЩЬЮ КАЛЬКУЛЯТОРА

Если у калькулятора есть клавиша $\boxed{\%}$, то с его помощью можно решать некоторые задачи на проценты.

Задача 1. Найти 12 % от 750.

Решение. Ответ можно получить следующим образом:

$$750 \cdot 0,12 = 90.$$

Тот же ответ можно получить нажатием клавиш

$$\boxed{7} \boxed{5} \boxed{0} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\%}.$$

Задача 2. Увеличить число 400 на 12 %.

Решение. Ответ на вопрос задачи можно найти, выполнив два действия:

$$400 \cdot 0,12 = 48 \text{ и } 400 + 48 = 448 \text{ —}$$

или объединив эти действия:

$$400 + 400 \cdot 0,12 = (1 + 0,12) \cdot 400 = 1,12 \cdot 400 = 448.$$

С помощью калькулятора вычисления упрощаются:

$$\boxed{4} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\%}.$$

Здесь при нажатии клавиши к числу 400 прибавляется 12 % этого числа. Получим 448.

Задача 3. Уменьшить число 300 на 15 %.

Решение. Ответ на вопрос задачи можно найти, выполнив два действия: $300 \cdot 0,15 = 45$ и $300 - 45 = 255$ — или объединив эти действия:

$$300 - 300 \cdot 0,15 = (1 - 0,15) \cdot 300 = 0,85 \cdot 300 = 255.$$

Решим ту же задачу с помощью калькулятора:

$$\boxed{3} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{\%}.$$

Получим 255.

Задача 4. Найти число, 12 % которого равны 720.

Решение. Ответ можно получить следующим образом:

$$720 : 0,12 = 6000,$$

а можно так:

$$\boxed{7} \boxed{2} \boxed{0} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\%}.$$

Получим 6000.

Задача 5. Сколько процентов числа 4 составляет число 3?

Решение. Здесь требуется выразить в процентах отношение числа 3 к числу 4. Эту задачу можно решить так:

$$\frac{3 \cdot 100}{4} = 75 (\%).$$

Тот же результат можно получить с помощью калькулятора:

$$\boxed{3} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{\%}.$$

Получим 75 %.

○ **Задача 6.** Увеличьте число 400 на 12 %, полученный результат увеличьте ещё раз на 12 %.

Решение. Как было установлено ранее, увеличение числа на 12 % можно выполнить, умножив это число на 1,12. Чтобы увеличить полученный результат ещё раз на 12 %, умножим его на 1,12 ещё раз:

$$400 \cdot 1,12 \cdot 1,12 = 501,76.$$

С помощью калькулятора можно выполнять многократное умножение числа на себя (возведение в степень). Тот же результат получим с помощью калькулятора, поменяв порядок действий:

$$\boxed{1} \boxed{\cdot} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\times} \boxed{=} \boxed{\times} \boxed{4} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{=} \bullet$$

- 922.** а) Найдите 36 % числа 500.
 б) В школе 540 учащихся. Мальчики составляют 55 % числа всех учащихся. Сколько в школе мальчиков?
- 923.** Товар стоил 45 р. На сколько рублей повысится цена товара, если её повышение составит:
 а) 10 %; б) 12 %; в) 20 %; г) 25 %?
- 924.** Магазин повышает цены на некоторые товары на 15 %. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните её, определив, на сколько рублей повысилась цена каждого товара и какой она стала.

Цена товара до повышения, р.	На сколько повысилась цена, р.	Новая цена товара, р.
200		
150		
420		

- 925.** Банк по срочным вкладам начисляет ежемесячный доход в размере 3 % от суммы вклада. Определите величину вклада через месяц.

Величина вклада в начале месяца, р.	Величина вклада через месяц, р.
700	
950	
320	

- 926.** Найдите число, 18 % которого равны 720.
- 927.** Из посаженных семян подсолнечника взошло 176 семян, что составило 88 % от числа посаженных. Сколько семян подсолнечника было посажено?
- 928.** На предновогодней распродаже магазин снизил цены на все товары на 12 %. Определите, какой стала цена каждого товара.

Цена товара до понижения, р.	Новая цена товара, р.
40	
300	
120	

929. Банк по срочным вкладам начисляет ежемесячный доход в размере 5 % от суммы вклада, имевшейся в начале месяца. В начале месяца на счёт положили 500 р. Определите величину вклада через:

а) 1 месяц; б) 2 месяца; в) 3 месяца,
если доход начисляется по формуле сложных процентов.

930. Сколько процентов составляет число 80 от:
а) 100; б) 320; в) 240; г) 60?

931. Из 120 посаженных семян подсолнечника взошло 102. Сколько процентов семян подсолнечника взошло?

932. В автоинспекции города N подсчитали, что число легковых автомобилей в городе увеличилось в последние годы на 15 % ежегодно. Во сколько раз увеличится число легковых автомобилей за 5 лет, если эта тенденция сохранится?

Решение. Если число легковых автомобилей в городе будет увеличиваться на 15 %, или в 1,15 раза, ежегодно, то за 5 лет оно увеличится в $1,15^5 = 2,011\dots$, т. е. примерно в 2 раза.

933. Вася прочитал в газете, что за последние 3 месяца цены на продукты питания росли в среднем на 10 % за каждый месяц. На сколько процентов выросли цены за 3 месяца?

934. Деньги, вложенные в акции известной фирмы, приносят ежегодно 20 % дохода. Через сколько лет вложенная сумма удвоится, если доход начисляется по формуле сложных процентов?

3 ФИГУРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ, СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ

Мы уже познакомились с двумя видами симметрий на плоскости — относительно точки и относительно прямой. В пространстве есть свои симметрии, с одной из них мы сталкиваемся ежедневно, когда смотрим на себя в зеркало. Эта симметрия так и называется — **зеркальная симметрия** или **симметрия относительно плоскости**.

Задача 1. Прочитайте слово, зашифрованное на рисунке 85.

На рисунке 86 показано, как с помощью зеркала прочитать зашифрованное слово.

На рисунке 87 изображён прямоугольный параллелепипед, рассечённый плоскостью α на две равные части. Рисунок производит впечат-

Рис. 85

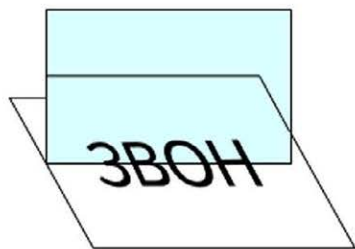


Рис. 86

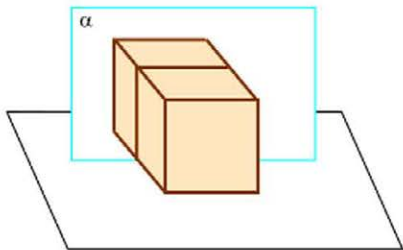


Рис. 87

ление, что половину параллелепипеда плотно приставили к зеркалу, в котором отражается его вторая половина.

Плоскость α в данном случае называют **плоскостью симметрии** параллелепипеда. У прямоугольного параллелепипеда три плоскости симметрии, каждая из которых, как и плоскость α , делит пополам четыре его параллельных ребра.

Задача 2. Сколько плоскостей симметрии у куба?

Решение. У куба есть три плоскости симметрии, каждая из которых делит пополам четыре его параллельных ребра. Но у куба есть и другие плоскости симметрии. Каждая из них проходит через два параллельных ребра куба, не принадлежащих одной грани. На рисунке 88 показана одна из таких плоскостей симметрии куба — плоскость β , точнее, не плоскость, а только её часть. Таких плоскостей 6. Таким образом, у куба 9 плоскостей симметрии.

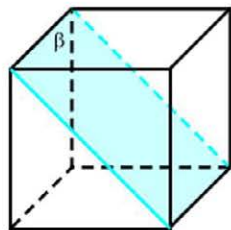


Рис. 88

На рисунках 89 и 90 изображена правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. В её

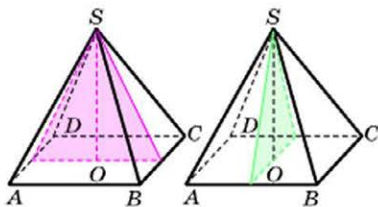


Рис. 89

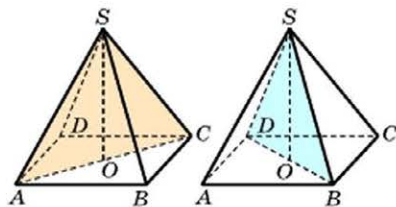


Рис. 90

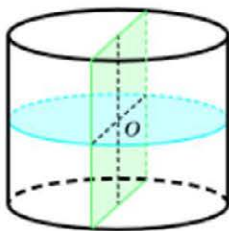


Рис. 91

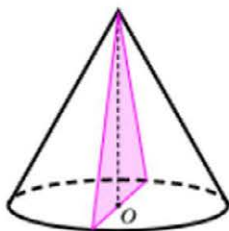


Рис. 92

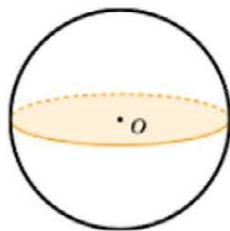


Рис. 93

основании лежит квадрат $ABCD$, а боковые грани — равные равнобедренные треугольники. У правильной четырёхугольной пирамиды имеется 4 плоскости симметрии. Две из них проходят через вершину пирамиды S и середины параллельных рёбер основания (см. рис. 89). Две другие проходят через вершину пирамиды S и противоположные вершины квадрата (см. рис. 90).

Мы рассмотрели геометрические фигуры (тела), имеющие конечное число плоскостей симметрии. Но имеются и фигуры, имеющие бесконечно много плоскостей симметрии.

Рассмотрим фигуры вращения: цилиндр, конус и шар.

Цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Эту сторону называют осью цилиндра. Любая плоскость, проходящая через ось цилиндра, является его плоскостью симметрии. На рисунке 91 изображена одна из таких плоскостей симметрии цилиндра. Их бесконечно много. У цилиндра есть ещё одна плоскость симметрии. Эта плоскость делит ось цилиндра пополам, и при её пересечении с цилиндром получается круг.

Конус получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (катеты — две стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол). Этот катет называют осью конуса. На рисунке 92 изображена одна из плоскостей симметрии конуса, проходящая через его ось. Таких плоскостей бесконечно много.



Рис. 94

На рисунке 93 изображён шар. Шар получается вращением круга вокруг диаметра. Любая плоскость, проходящая через центр шара, является его плоскостью симметрии.

Зеркальная симметрия используется в архитектуре. На рисунке 94 показано главное здание Московского университета, имеющее плоскость симметрии.

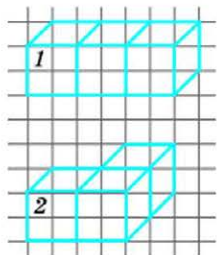


Рис. 95

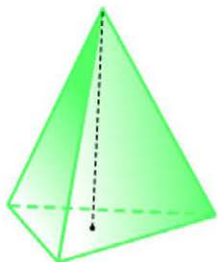


Рис. 96

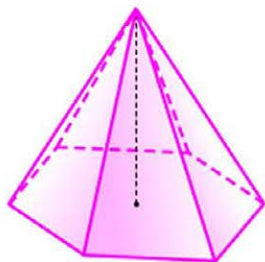


Рис. 97

- 935.** Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны: а) 3 см, 4 см, 5 см; б) 3 см, 4 см, 4 см; в) 4 см, 4 см, 4 см. Сколько плоскостей симметрии у этого прямоугольного параллелепипеда?
- 936.** Сколько плоскостей симметрии у цилиндра, конуса, шара?
- 937.** На клетчатой бумаге несложно рисовать кубики. На рисунке 95 изображены две фигуры, которые можно составить из трёх равных кубиков при условии, что каждый из них должен иметь хотя бы одну общую грань с остальными кубиками. Назовём их трикубиками. Убедитесь, что имеется только две фигуры трикубиков. Сколько плоскостей симметрии у каждой из них?
- 938.** Нарисуйте все фигуры тетракубиков, полученные из четырёх кубиков по тому же правилу, что и для трикубиков. Убедитесь, что существует только восемь фигур тетракубиков. Сколько плоскостей симметрии имеет каждая из них?
- 939.** Имеются ли плоскости симметрии у правильной пирамиды (если да, то сколько?), если она:
а) треугольная (рис. 96);
б) шестиугольная (рис. 97)?
- 940.** Петя получил записки с непонятными словами (рис. 98 и 99). Он догадался, как прочитать их с помощью зеркала. Придумайте слова, которые можно зашифровать тем же способом и прочитать с помощью зеркала.



Рис. 98

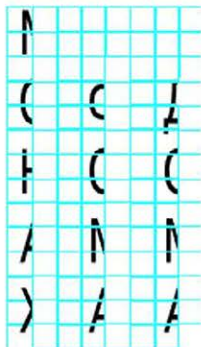


Рис. 99



Ранее уже говорилось о вавилонском способе записи дробей без знаменателей. Например, запись $15^{\circ}12'36''54'''$ соответствует сумме $15 + \frac{12}{60} + \frac{36}{60^2} + \frac{54}{60^3}$. Такая запись позволяла довольно быстро выполнять действия с дробями. Так, сумма $\left(5 + \frac{38}{60} + \frac{54}{3600}\right) + \left(6 + \frac{12}{60} + \frac{14}{3600}\right)$ может быть вычислена коротко:

$$\begin{array}{r} 5^{\circ}38'54'' \\ + 6^{\circ}12'14'' \\ \hline 11^{\circ}51'08'' \end{array}$$

Позднее так стали записывать и дроби со знаменателями 10, 100, 1000, ...:

$$2 \frac{1}{10} = 2 + \frac{1}{10} = 2^{\circ}1'; \quad 5 \frac{123}{1000} = 5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} = 5^{\circ}1'2''3'''.$$

В дальнейшем запись упростили, стали отделять целую и дробную части друг от друга не кружком сверху, а запятой снизу, цифры десятых, сотых, тысячных и т. п. стали писать слитно: $5^{\circ}1'2''3''' = 5,123$.

В 1427 году самаркандский математик и астроном Джамшид ибн-Масуд аль-Каши впервые подробно описал систему десятичных дробей и действий над ними. В Европе десятичные дроби стали известны через 100 с лишним лет после этого благодаря главным образом трудам фламандского инженера и учёного С. Стевина.

В России учение о десятичных дробях впервые было изложено в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого — первом русском печатном учебнике по математике. История создания учебника такова. 14 января 1701 года Пётр I подписал указ об учреждении в Москве Математико-навигационной школы. В школу принимались дети из различных сословий. После окончания школы они направлялись на военную, морскую и государственную службу. 22 февраля 1701 года учителем этой школы был назначен лучший в то время математик Москвы, которому поручили создать для школы учебник по математике и навигации. За «остроумие в науках» Петром I он был «именован прозванием Магницкий и учинён российскому благородному юношеству учителем математики». 21 ноября 1701 года рукопись учебника была закончена, и в 1703 году «Арифметика» Л. Ф. Магницкого была напечатана.



Книга использовалась не только в учебных заведениях, но и для самообразования. Один из экземпляров «Арифметики» в 1725 году попал к юному М. В. Ломоносову, который хранил эту книгу до конца своих дней. Позже М. В. Ломоносов назвал «Арифметику» Леонтия Магницкого и «Славянскую грамматику» (1643) Мелентия Смолицкого «воротами учёности».

Десятичные дроби благодаря простой записи и сходными с целыми числами правилами действий получили широкое распространение в практических расчётах.

Отметим, что в наше время в некоторых странах, например в США, целую и дробные части десятичных дробей отделяют не запятой, а точкой. Так, вместо

1,2; 35,48; 2,008

пишут

1.2; 35.48; 2.008.

Точкой отделяется целая часть числа от дробной в калькуляторах и компьютерах.

5 СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

- 941.** Арбуз весил 20 кг, в нём содержалось 99 % воды. Через несколько дней он немного усох и содержание воды уменьшилось до 98 %. Сколько теперь весит арбуз?

Решение. На первый взгляд кажется, что вес арбуза мало изменился, но это только на первый взгляд! Вес «сухого вещества» в арбузе составлял $100 - 99 = 1$ (%), или $20 \cdot 0,01 = 0,2$ (кг). После того как арбуз усох, вес «сухого вещества» составил $100 - 98 = 2$ (%) от нового веса арбуза. Найдём этот новый вес: $0,2 : 0,02 = 10$ (кг).

Итак, вес арбуза уменьшился вдвое!

- 942.** Некий леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В нашем лесу 99 % сосны. После рубки сосна будет составлять 98 % всех деревьев». Какую часть леса может вырубить леспромхоз?



- *943. На коробке с вермишелью написано: «Масса нетто 500 г при влажности 13 %». Какова масса вермишели, если она хранится при влажности 25 %?
- *944. Для получения томат-пасты протёртую массу томатов выпаривают в специальных машинах. Сколько тонн томат-пасты, содержащей 30 % воды, получится из 28 т протёртой массы томатов, содержащей 95 % воды?
- *945. Производительность труда повысили на 25 %. На сколько процентов уменьшится время выполнения задания?
- *946. Папа и сын плывут на лодке против течения. В какой-то момент сын уронил за борт папину шляпу. Только через 25 мин папа заметил пропажу, быстро развернул лодку, и они поплыли вниз по течению с той же собственной скоростью. Через сколько минут они догонят шляпу?
947. Папа купил себе дипломат с двумя кодовыми замками. На каждом из этих замков устанавливают код — набор из трёх цифр от 0 до 9 (рис. 100). Дипломат закрывают и на его наружной панели устанавливают произвольные наборы цифр. Каждый замок откроется лишь тогда, когда будет правильно набран его код.
- а) Саша установил новый код на каждый замок, но забыл сообщить об этом папе и ушёл в школу. Сколько времени может занять открывание замков у папы в худшем случае, если он будет последовательно проверять коды для каждого замка и на проверку каждого кода будет тратить 1 с?
- б) Какова вероятность открыть с первой попытки один кодовый замок? оба замка?
- в) Саша установил новый код на каждый замок и через некоторое время забыл, в каком порядке цифры 1, 2 и 3 образуют эти два кода. Сколько кодов в худшем случае придётся проверить Саше, чтобы открыть оба замка?
- г) Саша установил два новых кода на замках дипломата и через некоторое время забыл их. Он помнит, что в каждый код входят цифры 1, 2 и какая-то третья цифра (не 1 и не 2). Сколько кодов в худшем случае придётся проверить Саше, чтобы открыть один замок? оба замка?

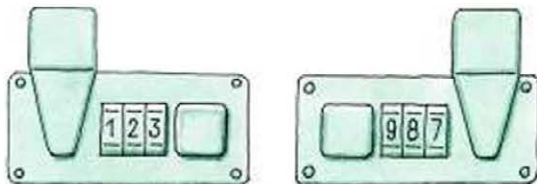


Рис. 100

- *948. В школе 20 классов. В ближайшем к школе доме живут 23 ученика этой школы. Можно ли утверждать, что среди них обязательно найдутся хотя бы два одноклассника?
- *949. В школе учится 370 человек. Докажите, что среди всех учащихся найдутся хотя бы два ученика, празднующие свой день рождения в один и тот же день.
- *950. Коля подсчитал, что на завтрак, обед и ужин он съел 10 конфет. Докажите, что хотя бы один раз он съел не меньше четырёх конфет.
- *951. В классе 37 человек. Докажите, что из них найдутся хотя бы 4 человека, родившиеся в один месяц.
- *952. В коллекции имеется 25 монет по 1, 2, 3 и 5 копеек. Есть ли среди них 7 монет одинакового достоинства?
- *953. Учительница объявила результаты диктанта. Больше всех ошибок было у Пети — 13. Докажите, что среди 28 учащихся, допустивших ошибки, найдутся 3 человека с одинаковым числом ошибок.
- *954. За 3 года Вася стал старше на 25%. Сколько теперь Васе лет?
- *955. а) Сейчас Ваня на 20% старше, чем 2 года назад. Сколько теперь Ване лет?
б) Два года назад Маша была на 20% моложе, чем сейчас. Сколько лет Маше сейчас?

ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Изучая главу 5, вы познакомитесь с бесконечными десятичными дробями — действительными числами, научитесь их сравнивать, различать периодические и непериодические десятичные дроби — рациональные и иррациональные числа. Вы узнаете, как изображаются эти числа на координатной оси.

5.1. Разложение положительной обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь

До сих пор мы рассматривали десятичные дроби, которые называют **конечными**, потому что после запятой у них стоит конечное число цифр. В дальнейшем мы будем рассматривать и бесконечные десятичные дроби. У них после запятой бесконечно много цифр.

Конечные десятичные дроби всегда можно записать в виде обыкновенных дробей. Например,

$$0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}; \quad 6,72 = \frac{672}{100} = \frac{168}{25}; \quad 0,065 = \frac{65}{1000} = \frac{13}{200}.$$

Заметим, что после сокращения дробей получились знаменатели $8 = 2^3$, $25 = 5^2$, $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

Из этих примеров видно, что

если конечную десятичную дробь записать в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то её знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

Это утверждение можно доказать в общем случае.
Верно и обратное утверждение:

Если знаменатель q несократимой дроби $\frac{p}{q}$ не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эта дробь разлагается в конечную десятичную дробь.

Например,

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

В этом примере числитель и знаменатель дроби мы умножили на 2, чтобы получить в знаменателе 10.

Аналогично поступим и в следующих примерах:

$$\frac{201}{200} = \frac{201 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{1005}{1000} = 1,005; \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

Для разложения в конечную десятичную дробь обыкновенной несократимой дроби, знаменатель которой не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, существует два способа.

Один из них мы уже рассмотрели, он сводится к умножению числителя и знаменателя дроби $\frac{p}{q}$ на соответствующую степень числа 2 или числа 5, чтобы в знаменателе получилась некоторая степень числа 10.

Другим является способ деления числителя на знаменатель уголком. Запишем этим способом обыкновенную дробь $\frac{3}{4}$ в десятичную (рис. 101, а). Те же вычисления иногда записывают иначе (рис. 101, б).

Следовательно, $\frac{3}{4} = 0,75$.

а)	
3,0	4
28	0,75
20	
20	
0	
б)	
3	4
3,0	0,75
28	
20	
20	
0	

Рис. 101

956. Конечную десятичную дробь записали в виде обыкновенной несократимой дроби. Может ли знаменатель этой дроби иметь простые делители, отличные от 2 и 5?

957. Какие делители должен иметь знаменатель обыкновенной несократимой дроби, чтобы она разлагалась в конечную десятичную дробь? Приведите примеры.

958. Какими способами можно разложить обыкновенную дробь в десятичную? Приведите примеры.

959. Какие простые множители содержит знаменатель дроби:

- а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{1}{48}$; в) $\frac{1}{56}$; г) $\frac{1}{24}$;
д) $\frac{1}{128}$; е) $\frac{1}{78}$; ж) $\frac{1}{256}$; з) $\frac{1}{625}$;
и) $\frac{1}{10}$; к) $\frac{1}{100}$; л) $\frac{1}{1000}$; м) $\frac{1}{10000}$?

960. Сократите дробь:

- а) $\frac{24}{60}$; б) $\frac{15}{20}$; в) $\frac{65}{100}$; г) $\frac{94}{100}$;
д) $\frac{21}{30}$; е) $\frac{16}{400}$; ж) $\frac{8}{100}$; з) $\frac{8}{1000}$.

961. Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби:

- а) 0,4; б) 0,12; в) 0,125; г) 1,2;
д) 0,45; е) 0,04; ж) 1,008; з) 0,0018.

962. Приведите дробь к знаменателю 10, или 100, или 1000:

- а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{1}{25}$;
д) $\frac{11}{20}$; е) $\frac{9}{8}$; ж) $\frac{3}{8}$; з) $\frac{7}{40}$.

963. Разложите двумя способами в десятичную дробь:

- а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{24}{15}$; г) $\frac{15}{24}$.

Разложите обыкновенную дробь в десятичную делением числителя на знаменатель уголком (**964—966**):

- 964.** а) $\frac{7}{5}$; б) $\frac{3}{16}$; в) $\frac{48}{15}$; г) $\frac{3}{2000}$;
д) $\frac{17}{40}$; е) $\frac{28}{140}$; ж) $\frac{3}{12}$; з) $\frac{7}{56}$.

- 965.** а) $\frac{6}{24}$; б) $\frac{7}{4}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{9}{5}$;
д) $\frac{3}{25}$; е) $\frac{12}{75}$; ж) $\frac{17}{200}$; з) $\frac{123}{20}$.

966. а) $\frac{783}{40}$; б) $\frac{324}{25}$; в) $\frac{625}{125}$; г) $\frac{860}{400}$;
 д) $\frac{33}{60}$; е) $\frac{1024}{256}$; ж) $\frac{804}{400}$; з) $\frac{624}{120}$.

967. Можно ли разложить данную обыкновенную дробь в конечную десятичную дробь (ответ обосновать):

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{6}{48}$; в) $\frac{7}{352}$; г) $\frac{12}{56}$;
 д) $\frac{120}{38}$; е) $\frac{12}{96}$; ж) $\frac{21}{75}$; з) $\frac{7}{300}$?

5.2. Бесконечные периодические десятичные дроби

Из изложенного в предыдущем пункте следует, что если знаменатель несократимой дроби $\frac{p}{q}$ имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, то эта дробь не разлагается в конечную десятичную дробь. Поэтому при делении числителя этой дроби на знаменатель уголком не может получиться конечная десятичная дробь.

Пример 1. Разложим в десятичную дробь число $\frac{7}{9}$.

Это несократимая дробь, и её знаменатель имеет простой делитель 3, отличный от 2 и 5. Поэтому число $\frac{7}{9}$ известно не разлагается в конечную десятичную дробь. Разделим всё же числитель этой дроби на знаменатель уголком (рис. 102, а; другая запись деления показана на рис. 102, б).

На каждом этапе вычисления получается один и тот же остаток 7, а в частном одна и та же цифра 7. Процесс этот бесконечен (не имеет конца).

а)

7, 0	9
6 3	0, 7 7 7 ...
7 0	
6 3	
7 0	
6 3	
7...	

б)

7	9
7, 0	0, 7 7 7 ...
6 3	
7 0	
6 3	
7 0	
6 3	
7...	

Рис. 102

Он приводит к выражению $0,777\dots$, где точки означают, что цифра 7 повторяется бесконечно много раз.

Выражение $0,777\dots$ называют **бесконечной периодической десятичной дробью** или просто периодической дробью, её записывают ещё так: $0,(7)$ и читают: «нуль целых и семь в периоде». Цифру 7 называют периодом дроби $0,(7)$.

Говорят, что число $\frac{7}{9}$ представлено в виде периодической дроби $0,(7)$ или что периодическая дробь $0,(7)$ есть десятичное разложение числа $\frac{7}{9}$. Пишут:

$$\frac{7}{9} = 0,777\dots = 0,(7).$$

Надо иметь в виду, что $\frac{7}{9}$ и $0,(7)$ являются разными обозначениями одного и того же числа в виде обыкновенной дроби $\frac{7}{9}$ и в виде бесконечной периодической десятичной дроби $0,(7)$.

Пример 2. Разложим в десятичную дробь число $\frac{2}{99}$.

Дробь $\frac{2}{99}$ несократимая, и её знаменатель имеет простые делители, отличные от 2 и 5. Поэтому её десятичное разложение не может быть конечным. В самом деле, разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} 2,0000 & 99 \\ \hline 198 & 0,0202\dots \\ \hline & \underline{200} \\ & \underline{198} \\ & 2 \\ & \dots \end{array}$$

Процесс деления числителя на знаменатель уголком здесь бесконечный, он приводит к периодической дроби $0,0202\dots$. Группа цифр (02) является периодом дроби $0,0202\dots$. Эту периодическую дробь записывают так: $0,(02)$ и читают: «нуль целых и нуль два в периоде».

Говорят, что число $\frac{2}{99}$ представлено в виде периодической дроби $0,(02)$ или что периодическая дробь $0,(02)$ есть десятичное разложение числа $\frac{2}{99}$, и пишут:

$$\frac{2}{99} = 0,0202\dots = 0,(02).$$

Пример 3. Разложим в десятичную дробь число $\frac{143}{45}$.

Разделив числитель дроби $\frac{143}{45}$ на её знаменатель уголком, получим

$$\frac{143}{45} = 3,1777\dots = 3,1(7).$$

Правая часть этого равенства читается так: «три целых, одна десятая и семь в периоде».

Вообще, если числитель положительной несократимой дроби разделить на её знаменатель уголком, то в частном получится либо конечное, либо бесконечное периодическое её десятичное разложение.

Поставив перед положительной периодической дробью знак «-», получим отрицательную периодическую дробь.

Например, $-0,(7) = -\frac{7}{9}$. Периодическая дробь $-0,(7)$ есть десятичное разложение числа $-\frac{7}{9}$.

Приписывая к целому числу (после запятой) или к конечной десятичной дроби бесконечно много нулей, мы превращаем её в равную ей бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом 0.

Например,

$$27 = 27,000\dots = 27,(0); \quad 0,354 = 0,354000\dots = 0,354(0); \\ -3,1 = -3,1000\dots = -3,1(0); \quad 0 = 0,000\dots = 0,(0).$$

Следовательно, любое целое число и любую конечную десятичную дробь можно считать периодической дробью с периодом 0.

Итак, любое рациональное число $\frac{p}{q}$ разлагается в периодическую дробь. Можно показать также, что любая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа.

В следующем пункте даётся обоснование этим утверждениям.

968. В каком случае несократимая обыкновенная дробь не разлагается в конечную десятичную дробь?

969. Каким способом любую обыкновенную дробь можно разложить в десятичную?

970. Какие десятичные дроби можно получить при делении уголком числителя обыкновенной дроби на её знаменатель?

971. Как узнать, в какую десятичную дробь разлагается обыкновенная дробь — в конечную или в бесконечную? Приведите примеры.

972. Как можно записать конечную десятичную дробь или натуральное число в виде бесконечной периодической десятичной дроби? Приведите примеры.

973. Запишите число в виде периодической дроби, назовите её период:

- а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{12}{5}$; г) 12; д) $\frac{24}{30}$;
е) $\frac{36}{48}$; ж) $\frac{4}{7}$; з) $\frac{45}{63}$; и) $\frac{1}{6}$; к) $\frac{2}{6}$;
л) $\frac{3}{6}$; м) $\frac{4}{6}$; н) $\frac{20}{41}$; о) $\frac{15}{37}$; п) $\frac{5}{21}$.

974. Разложите обыкновенную дробь в периодическую делением числителя на знаменатель углом:

- а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{3}{9}$; г) $\frac{4}{9}$.



975. Разложите обыкновенную дробь в периодическую:

- а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{6}{9}$; в) $\frac{7}{9}$; г) $\frac{8}{9}$.

976. Разложите обыкновенную дробь в десятичную и назовите её период:

- а) $\frac{12}{99}$; б) $\frac{23}{99}$; в) $\frac{34}{99}$; г) $\frac{45}{99}$.

977. Разложите обыкновенную дробь в периодическую:

- а) $\frac{56}{99}$; б) $\frac{67}{99}$; в) $\frac{78}{99}$; г) $\frac{89}{99}$.

978. Используя предыдущие задания, запишите периодическую дробь в виде обыкновенной:

- а) 0,(1); б) 0,(3); в) 0,(5); г) 0,(7);
д) 0,(25); е) 0,(37); ж) 0,(10); з) 0,(05).

Придумываем задачу

- 979.** а) Запишите три любые обыкновенные дроби со знаменателем 999 в виде периодических десятичных дробей.
б) Запишите три любые периодические десятичные дроби с периодом, состоящим из трёх цифр, в виде обыкновенных дробей.

5.3*. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби

Покажем, что если числитель положительной несократимой дроби $\frac{p}{q}$ разделить на её знаменатель уголком, то в частном получится либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь.

Если знаменатель q несократимой дроби не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то при делении числителя на знаменатель получится конечная десятичная дробь. В остальных случаях получится бесконечная десятичная дробь. Наша цель показать, что она периодическая.

Рассмотрим сначала пример. Пусть надо найти десятичное разложение дроби $\frac{88}{7}$. Будем делить 88 на 7 уголком:

$$\begin{array}{r} 88 \quad | \quad 7 \\ \underline{-7} \quad | \quad 12,5714285\dots \\ 18 \\ \underline{-14} \\ *40 \\ \underline{-35} \\ 50 \\ \underline{-49} \\ 10 \\ \underline{-7} \\ 30 \\ \underline{-28} \\ 20 \\ \underline{-14} \\ 60 \\ \underline{-56} \\ **40 \\ \underline{-35} \\ 5 \\ \dots \end{array}$$

Остатки, получаемые после того, как снесена последняя цифра делимого, выделены синим цветом. Мы видим, что остатки, помеченные одной и двумя звёздочками, равны между собой. Это показывает, что процесс деления имеет периодический характер и приводит к бесконечной периодической десятичной дроби, т. е.

$$\frac{88}{7} = 12,(571428).$$

То, что десятичное разложение дроби $\frac{88}{7}$ должно быть бесконечным периодическим, можно объяснить и без вычислений.

Данная дробь $\frac{88}{7}$ несократимая, её знаменатель содержит простой делитель, отличный от 2 и 5. Следовательно, десятичное разложение числа $\frac{88}{7}$ не может быть конечным — возникающие при делении остатки положительны на любом этапе деления. В то же время каждый остаток меньше 7, т. е. он равен одному из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Но тогда, если мы будем рассматривать подряд остатки, начиная с отмеченного одной звездочкой, то среди первых семи из них обязательно найдутся два равных между собой остатка. Это и показывает, что в частном получится периодическая дробь.

Подобные рассуждения можно провести для любой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5. Если делить p на q уголком, то наступит такой этап, когда все цифры делимого будут снесены. Если рассмотреть подряд все возникающие (начиная с этого момента) остатки, то среди первых q из них всегда найдутся два равных между собой. А это и показывает, что процесс деления бесконечный и периодический.

Итак,

любое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ разлагается в бесконечную периодическую десятичную дробь.

Напомним, что конечную десятичную дробь можно считать периодической дробью (с периодом 0).

Справедливо и обратное утверждение:

любая положительная периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа.

Рассмотрим на примерах, как можно находить это число.

Пример 1. Запишем периодическую дробь $0,(8)$ в виде обыкновенной дроби. Для этого обозначим искомую дробь через x :

$$x = 0,888\dots$$

Умножим это равенство на 10, получим $10x = 8,888\dots$

Вычтем первое равенство из второго, получим

$$\begin{aligned}10x - x &= 8, \\9x &= 8, \\x &= \frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Разделив числитель дроби $\frac{8}{9}$ на её знаменатель уголком, убедимся, что эта дробь действительно равна периодической дроби $0,(\overline{8})$.

Пример 2. Запишем периодическую дробь $2,35(\overline{7})$ в виде обыкновенной дроби. Для этого обозначим искомую дробь через x :

$$x = 2,357777\dots$$

Умножая это равенство на 100 и на 1000, получим равенства

$$\begin{aligned}100x &= 235,777\dots \text{ и} \\1000x &= 2357,777\dots\end{aligned}$$

Вычитая первое равенство из второго, находим, что

$$1000x - 100x = 2357 - 235,$$

откуда

$$\begin{aligned}x &= \frac{2357 - 235}{900}, \\x &= \frac{2122}{900}.\end{aligned}$$

Разделим числитель дроби $\frac{2122}{900}$ на знаменатель уголком и убедимся, что эта дробь действительно равна периодической дроби $2,35(\overline{7})$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно заметить, что

$$\begin{aligned}2,4(0) &= \frac{240 - 24}{90} = 2,4, \\2,3(9) &= \frac{239 - 23}{90} = 2,4.\end{aligned}$$

Следовательно, $2,4 = 2,4(0) = 2,3(9)$.

Аналогично показывается, что любую периодическую дробь с периодом 9 можно заменить равной ей конечной десятичной дробью.

Замечание. При делении уголком десятичное разложение с периодом 9 не возникает. Кроме того, использование дробей с периодом 9 привело бы к нарушению правил сравнения десятичных дробей. Поэтому обычно не рассматривают периодические дроби с периодом 9.

- 980.** Какие остатки могут получиться при делении натуральных чисел на: а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 9; е) 11?

Доказываем

- 981.** Докажите, что при делении натурального числа p на натуральное число q ($q > 1$) получается бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом, состоящим не более чем из $(q - 1)$ цифры.

- 982.** а) Сколько цифр может быть в периоде десятичного разложения обыкновенной несократимой дроби со знаменателем 7?
б) В каком случае разложение обыкновенной дроби в десятичную является: конечным; бесконечным?
в) Почему десятичное разложение дроби $\frac{3}{7}$ периодическое?

- 983.** Разложите обыкновенную дробь в десятичную делением числителя на знаменатель уголком:

а) $\frac{1}{11}$; б) $\frac{2}{11}$; в) $\frac{1}{12}$; г) $\frac{5}{12}$; д) $\frac{1}{7}$; е) $\frac{5}{7}$; ж) $\frac{2}{7}$; з) $\frac{1}{33}$.

- 984.** Запишите периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:
а) 1,(8); б) 0,(3); в) 0,(7); г) 3,(5);
д) 0,1(2); е) 1,12(3); ж) 7,5(4); з) 0,(35);
и) 0,(59); к) 0,(12); л) 1,0(12); м) 8,7(21).

- 985.** Покажите, что периодическая дробь с периодом 9 равна конечной десятичной дроби: а) $0,3(9) = 0,4$; б) $1,2(9) = 1,3$.

5.4. Непериодические бесконечные десятичные дроби

Рассмотрим положительную бесконечную десятичную дробь

$$0,10110111011110\dots,$$

в которой после запятой записаны цифры: единица, нуль, две единицы, нуль, три единицы, нуль и т. д. У этой дроби никакая группа цифр не является периодом. Эта дробь **непериодическая** и, значит, не может быть десятичным разложением какого-либо рационального числа.

Вот ещё примеры положительных бесконечных непериодических десятичных дробей:

$$0,01001000100001\dots, \quad 17,1234567891011\dots$$

У первой дроби после запятой записаны цифры: нуль, единица, два нуля, единица, три нуля, единица и т. д.

У второй — после запятой записаны в возрастающем порядке числа натурального ряда.

Поставив перед положительной дробью знак « \leftarrow », получим отрицательную дробь. Например, дроби

$$-0,01001000100001\dots, \quad -17,1234567891011\dots$$

есть отрицательные бесконечные непериодические десятичные дроби.

Бесконечные десятичные дроби называют числами.

Число, которое можно записать в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, называют **иррациональным** (нерациональным) **числом**.

Если иррациональное число обозначено буквой, например

$$a = 0,01001000100001\dots,$$

то говорят, что правая часть этого равенства есть десятичное разложение числа a .

Рациональные и иррациональные числа называют **действительными числами**.

Любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби. Если число рациональное, то дробь периодическая, если число иррациональное, то дробь непериодическая.

- 986.** Какое число называют:
а) рациональным; б) иррациональным; в) действительным?
- 987.** Любое ли иррациональное число является действительным?

Придумываем задачу

- 988.** Придумайте какие-нибудь пять бесконечных непериодических дробей (иррациональных чисел).

- 989.** Существует ли рациональное число, равное бесконечной непериодической дроби?
- 990.** Каким числом (рациональным или иррациональным) является число:
а) 0,275; б) 0,(2); в) 1,32323232...;
г) 1,15(45); д) 3,10110111011110...; е) 0,12345678...?

- 991.** Запишите четыре числа:
а) натуральных; б) положительных; в) отрицательных;
г) целых; д) рациональных; е) иррациональных;
ж) чётных; з) нечётных; и) простых;
к) составных; л) кратных 3; м) кратных 2 и 5.

992. Запишите два числа:

- а) рациональных и отрицательных; б) целых и кратных 5;
в) целых и положительных; г) простых и больших 30;
д) нечётных и кратных 7; е) составных и чётных.

5.5*. Действительные числа

Число до запятой у положительной бесконечной десятичной дроби называют **целой частью этой дроби**.

Первую цифру после запятой у бесконечной десятичной дроби называют цифрой первого разряда после запятой, вторую цифру — цифрой второго разряда после запятой, третью — цифрой третьего разряда после запятой и т. д.

Числа, отличающиеся только знаком, называют противоположными числами.

Например, числа $-4,328\dots$ и $4,328\dots$ — противоположные.

Если одно из двух противоположных чисел обозначить буквой a , то другое обозначают $-a$.

Если a — положительное число, то $-a$ — отрицательное число; если a — отрицательное число, то $-a$ — положительное число; если $a = 0$, то $-a = 0$.

Модуль (абсолютную величину) действительного числа a обозначают $|a|$ и определяют следующим образом:

$|a| = a$, если a положительно,

$|a| = 0$, если $a = 0$,

$|a| = -a$, если a отрицательно.

Для числа $a = 0$ верны равенства $|a| = a$, $|a| = -a$, так как $-0 = 0$.

Бесконечные десятичные дроби (не имеющие периода 9) сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.

Пример 1. Сравним числа $-3,1$ и $-3,(1)$.

Решение. Так как $|-3,1| = 3,1 = 3,1000\dots$, $|-3,(1)| = 3,(1) = 3,1111\dots$ и $3,1 < 3,(1)$, то $-3,1 > -3,(1)$.

Действительно, модули этих чисел имеют одинаковые целые части и одинаковые цифры первого разряда после запятой, но цифра второго разряда после запятой у дроби $3,1$ меньше, чем у дроби $3,(1)$. Поэтому модуль первой дроби меньше модуля второй и по правилу сравнения отрицательных чисел получаем

$$-3,1 > -3,(1).$$

Правила сложения, вычитания, умножения и деления конечных десятичных дробей нам уже хорошо известны. Можно дать формальные правила сложения, вычитания, умножения и деления

бесконечных десятичных дробей — они сложнее соответствующих правил для конечных десятичных дробей. Эти правила требуют применения бесконечных процессов и потому могут представлять лишь теоретический интерес. Они здесь не приводятся.

На практике бесконечные десятичные дроби (т. е. действительные числа) складывают, вычитают, умножают и делят приближённо точно так же, как и конечные десятичные дроби.

Пример 2. Найдём приближённо сумму и разность чисел a и b , округлив их с точностью до одной десятой, если:

$$a = 23,(18), b = -4,23(75).$$

Решение. Округляя эти числа с точностью до одной десятой, находим, что $a \approx 23,2$ и $b \approx -4,2$. Откуда получаем ответ:

$$a + b \approx 19,0; a - b \approx 27,4.$$

Пример 3. Найдём приближённо произведение $a \cdot b$ и частное $a : b$ чисел a и b , округлив их с точностью до третьей значащей цифры, если:

$$a = -135,78(6), b = 0,0068751.$$

Решение. Округляя эти числа с точностью до третьей значащей цифры, находим, что $a \approx -136$, $b \approx 0,00688$. Откуда получаем ответ:

$$\begin{aligned} a \cdot b &\approx -0,93568 \approx -0,936; \\ a : b &\approx -19767,4\dots \approx -19800 = -1,98 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Для действительных чисел справедливы те же основные свойства, что и для рациональных чисел:

1. Для любых двух действительных чисел a и b имеет место только одно из соотношений:

$$a = b, a < b, a > b.$$

2. Для любых двух действительных чисел a и b , таких, что $a < b$, найдётся такое действительное число c , что $a < c$ и $c < b$, т. е. $a < c < b$.

3. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ — свойство транзитивности неравенств.

4. Если $a < b$, то $a + c < b + c$ для любого действительного числа c .

5. Если $a < b$ и c — положительное число, то справедливо неравенство $a \cdot c < b \cdot c$.

Для любых действительных чисел a , b и c справедливы равенства:

$$a + b = b + a, \quad (1)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (2)$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (3)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad (4)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (5)$$

$$a + 0 = a, \quad (6)$$

$$a + (-a) = 0, \quad (7)$$

$$a - b = a + (-b), \quad (8)$$

$$a \cdot 1 = a, \quad (9)$$

$$a \cdot 0 = 0, \quad (10)$$

$$-a = (-1) \cdot a, \quad (11)$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0), \quad (12)$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0). \quad (13)$$

Подчеркнём ещё раз, что делить на нуль нельзя, поэтому запись $\frac{a}{0}$ бессмысленна для любого действительного числа a , в том числе и для $a = 0$.

Замечание. Мы знаем, что эти свойства могут быть обоснованы для рациональных чисел a, b, c . Подобное обоснование можно выполнить и для действительных чисел (не только рациональных, но и иррациональных), пользуясь тем, что они приближаются десятичными дробями.

- 993.** Что называют целой частью положительной бесконечной десятичной дроби?
- 994.** Назовите цифры пятого, шестого, седьмого разрядов после запятой у дроби: а) 13,(27); б) 17,12345678...; в) 0,000(12).
- 995.** Какие числа называют противоположными? Приведите примеры.
- 996.** Как обозначают число, противоположное числу a ?
- 997.** Если число обозначено через $-a$, значит ли это, что оно отрицательное? Приведите примеры.
- 998.** Что называют модулем (абсолютной величиной) действительного числа? Приведите примеры.
- 999.** Как сравнить два действительных числа? Приведите примеры.
- 1000.** Если $|a| < |b|$, то всегда ли верно неравенство $a < b$?
- 1001.** Пусть $|a| = |b|$. В каких случаях $a = b$ и в каких $a = -b$?
- 1002.** Поясните, как надо понимать записи:
а) $a \leq b$; б) $a < b < c$; в) $a \leq b < c$; г) $a < b \leq c$; д) $a \leq b \leq c$.

- 1003.** Для каких чисел верно равенство:
 а) $|a| = a$; б) $|a| = -a$?
- 1004.** Найдите модуль (абсолютную величину) числа:
 а) $-2,(3)$; б) $-0,5777$; в) $-12,0(12)$; г) $3,0(13)$.
- 1005.** Найдите число, противоположное числу:
 а) $2,5(3)$; б) $-1,(72)$; в) $3,1(12)$; г) $3,0(13)$.
- 1006.** Сравните числа:
 а) $3,5$ и $3,(5)$; б) $-2,14$ и $-2,1(4)$;
 в) $-3,(2)$ и $4,11$; г) $-5,(43)$ и $-5,(4)$.
- 1007.** Округлите числа a и b с точностью до $0,1$ и вычислите приближённо разность $a - b$, если:
 а) $a = 12,32$, $b = 0,1$; б) $a = 0,(2)$, $b = -2,323$;
 в) $a = 4,2$, $b = 1,(1)$; г) $a = 45,6(12)$, $b = 10,(2)$.
- 1008.** Найдите приближённо сумму чисел, беря слагаемые с точностью до $0,01$:
 а) $3,5 + 3,(5)$; б) $1,359 + 3,2(6)$;
 в) $12,351 + 0,(3)$; г) $7,(41) + 5,(36)$.
- 1009.** Найдите приближённо разность чисел, беря уменьшаемое и вычитаемое с точностью до $0,001$:
 а) $11,(4) - 7,3$; б) $12,(15) - 3,7236$;
 в) $7,(93) - 2,(39)$; г) $3,3297 - 6,(8)$.
- 1010.** Найдите приближённо произведение чисел, беря множители с точностью до второй значащей цифры:
 а) $1,3 \cdot 12,(1)$; б) $0,56 \cdot 0,(3)$;
 в) $9,(1) \cdot 6,(2)$; г) $12,(45) \cdot 1,(1)$.
- 1011.** Найдите приближённо частное чисел, беря делимое и делитель с точностью до третьей значащей цифры:
 а) $3,2 : 0,(2)$; б) $0,(5) : 2$;
 в) $3,(82) : 2,(3)$; г) $35,0(8) : 4,(02)$.
- 1012.** а) Что получится, если к числу прибавить 0 ?
 б) Чему равна сумма противоположных чисел?
 в) Можно ли разность $a - b$ записать в виде суммы?
 г) Что получится, если число умножить на 1 ?
 д) Что получится, если число умножить на 0 ?



Доказываем

- 1013.** Докажите, пользуясь свойствами действительных чисел, что:
 а) если $a < b$ и c — отрицательное число, то $a \cdot c > b \cdot c$;
 б) если $0 < a < b$, то $a^2 < b^2$;
 в) если $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$.

1014. Какими свойствами арифметических действий воспользовались при вычислениях:

а) $125 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 = 125 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 = 1000 \cdot 21 = 21\,000$;

б) $4 \frac{2}{3} \cdot 7 \frac{1}{3} + 2 \frac{2}{3} \cdot 4 \frac{2}{3} = 4 \frac{2}{3} \cdot \left(7 \frac{1}{3} + 2 \frac{2}{3}\right) = 4 \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{14 \cdot 10}{3} = 46 \frac{2}{3}$;

в) $4 \frac{2}{5} \cdot 7 \frac{13}{19} \cdot \frac{5}{22} = \frac{22}{5} \cdot \frac{5}{22} \cdot 7 \frac{13}{19} = 7 \frac{13}{19}$?

1015. Известно, что если $a < b$, то $a + c < b + c$ для любого действительного числа c . Проиллюстрируйте это свойство действительных чисел на примере, взяв $a = -4,7$, $b = -5,25$, $c = -2,3$.

1016. Найдите два числа x , удовлетворяющие условию:

а) $|x - 5,3| = 1$; б) $|x - 5,3| < 1$; в) $|x - 5,3| > 1$.

Сколько таких чисел можно найти в каждом случае?

Вычислите (**1017**–**1020**):

- 1017.** а) $68 \cdot 48 + 68 \cdot 52$; б) $59 \cdot 37 + 59 \cdot 63$;
в) $87 \cdot 29 + 87 \cdot 71$; г) $17 \cdot 73 - 63 \cdot 17$;
д) $382 \cdot 400 - 500 \cdot 382$; е) $756 \cdot 350 + 756 \cdot 650$.

1018. а) $352 \cdot 18 : 9$; б) $748 \cdot 12 : 6$; в) $126 \cdot 96 : 32$; г) $172 \cdot 128 : 64$.

1019. а) $25 \cdot 7 \cdot 8$; б) $13 \cdot 12 \cdot 25$; в) $2 \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{1}{3}$;
г) $\frac{1}{7} \cdot 8 \frac{1}{6} \cdot 6$; д) $78 : 3 \cdot \left(\frac{1}{8} - 2 \frac{1}{8}\right)$; е) $\left(75 - 100 \frac{1}{2}\right) \cdot 0,04$.

1020. а) $12,5(67) - 12,5(67)$; б) $6,7(89) \cdot 0$;
в) $4,51(2) : 1$; г) $0 : 0,0(654)$.

5.6. Длина отрезка

Рассмотрим несколько примеров измерения длины отрезка. За единичный отрезок (единицу длины) возьмём 1 дм (рис. 103)¹.



Пример 1. Отрезок AB , изображённый на рисунке 104, имеет длину 2 дм, т. е. на отрезке AB укладывается точно 2 дм. Пишут: $AB = 2$ дм.

¹ В этом пункте все рисунки даны в масштабе 1 : 2.

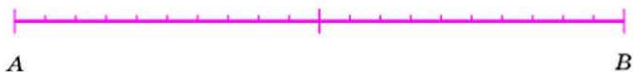


Рис. 104

Пример 2. На рисунке 105 в отрезке AB укладывается 2 дм с некоторым остатком, меньшим 1 дм. В этом случае говорят, что длина AB приближённо равна 2 дм с точностью до 1 дм с недостатком, и пишут: $AB \approx 2$ дм.



Рис. 105

Пример 3. На рисунке 106 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором укладывается точно 3 см. В этом случае пишут: $AB = 2,3$ дм.



Рис. 106

Пример 4. На рисунке 107 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором укладывается 3 см с остатком, меньшим 1 см. В этом случае длина отрезка AB приближённо равна 2,3 дм с точностью до 0,1 дм с недостатком. Пишут: $AB \approx 2,3$ дм.



Рис. 107

Пример 5. Если в примере 4 во втором остатке укладывается точно 4 миллиметра, то пишут: $AB = 2,34$ дм.

Пример 6. Если в примере 4 во втором остатке укладывается 4 мм с остатком, меньшим 1 мм, то говорят, что длина отрезка AB приближённо равна 2,34 дм с точностью до 0,01 дм с недостатком: $AB \approx 2,34$ дм.

Так же как в примерах 1—6, можно измерять длины отрезков любой другой единицей длины: 1 см, 1 м, 1 км, ...

Пример 7. Если $AB = 0,2305$, то это значит, что длина отрезка AB меньше длины единичного отрезка (единицы длины); в отрезке AB укладывается $0,2$ единицы с остатком, в котором укладывается $0,03$ единицы с остатком, в котором в свою очередь укладывается точно $0,0005$ единицы.

Если при измерении данного отрезка AB при помощи заданной единицы длины, её десятых, сотых, тысячных и т. д. долей на любом этапе измерения возникает остаток, то длина AB при помощи конечной дроби может быть выражена только приближённо. Точно же длина отрезка AB выражается бесконечной десятичной дробью:

$$AB = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \dots$$

Здесь α_0 — приближённая длина AB с точностью до 1 с недостатком; α_0, α_1 — приближённая длина AB с точностью до 0,1 с недостатком; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ — приближённая длина AB с точностью до 0,01 с недостатком и т. д.

Пример 8. Если $AB = 3,(07) = 3,070707\dots$, то приближённая длина отрезка AB равна:

- 3 — с точностью до 1 с недостатком;
 - 3,0 — с точностью до 0,1 с недостатком;
 - 3,07 — с точностью до 0,01 с недостатком;
 - 3,070 — с точностью до 0,001 с недостатком и т. д.
- Отметим, что

$$3,(07) = 3 \frac{7}{99}.$$

Поэтому это число можно рассматривать как длину отрезка, в котором укладывается 3 единицы (три единичных отрезка) и ещё $\frac{7}{99}$ единицы.

На практике, чтобы начертить с помощью линейки отрезок AB , воспользовались бы его приближённой длиной, заданной десятичной дробью. Например, приняли бы, что $AB \approx 3,07$. Ведь обычные измерительные приборы приспособлены к десятичной системе счисления — единица длины делится на 10, 100, 1000, ... равных частей.

Замечание. Ранее вводилось уже понятие длины отрезка, но только в том случае, когда его длина выражается рациональным числом. В этом пункте дано понятие длины произвольного отрезка, которая может выражаться как рациональным, так и иррациональным числом. Подводя итог, можно сказать, что произвольный отрезок AB имеет длину a — положительное число. Верно и обратное утверждение: если дано положительное число a , то можно указать отрезок AB , длина которого равна этому числу.

- 1021.** На рисунке 108 изображены отрезки BC , AD , KP . Определите на глаз длину каждого отрезка в сантиметрах. Проверьте свой глазомер с помощью линейки.

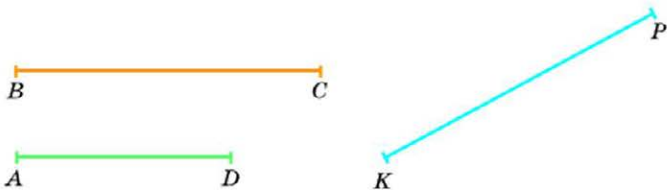


Рис. 108

- 1022.** Постройте в тетради три произвольных отрезка и выполните предыдущее задание.
- 1023.** Постройте в тетради отрезки длиной 3,5 см, 5 см и 6,5 см. Разделите на глаз каждый отрезок на 3 равные части. Проверьте свой глазомер с помощью линейки.
- 1024.** Постройте отрезок длиной 8,5 см. Разделите на глаз этот отрезок на 5 равных частей; на 6 равных частей.
- 1025.** На рисунке 109 изображены отрезки AB и CD . Приняв за единицу измерения отрезок CD , измерьте на глаз отрезок AB с точностью до 1 с недостатком. Проверьте свой глазомер с помощью циркуля.



Рис. 109

- 1026.** Длина отрезка AB выражена числом 5,375. Запишите приближённую длину отрезка AB с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 с недостатком.
- 1027.** Длина отрезка AB равна:
- а) $3\frac{1}{8}$; б) $2\frac{5}{16}$; в) $3\frac{61}{99}$; г) $4\frac{14}{27}$.
- Выразите длину отрезка десятичной дробью с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 с недостатком.
- 1028.** Выразите длину отрезка AB десятичной дробью с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 с недостатком, если $AB = 3\frac{19}{99}$.

5.7. Длина окружности. Площадь круга

Ещё в глубокой древности было замечено, что

отношение длины окружности к длине её диаметра выражается одним и тем же числом для всех окружностей.

Это число теперь принято обозначать греческой буквой π (пи). π — иррациональное число, которое выражается бесконечной непериодической дробью:

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028\dots$$

Закон, по которому вычисляют цифры числа π , очень сложен. Мы записали у этого числа 34 знака после запятой. Но с помощью вычислительных машин можно вычислить практически любую его цифру после запятой. Обычно используют приближение числа π с точностью до одной сотой:

$$\pi \approx 3,14.$$

Число π есть отношение длины окружности (C) к длине её диаметра (d):

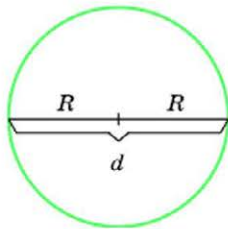


Рис. 110

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2R},$$

поэтому справедлива формула:

$$C = 2\pi R.$$

Здесь R — радиус окружности, C — её длина (рис. 110).

С помощью числа π вычисляется площадь S круга радиуса R :

$$S = \pi R^2.$$

Пример. Радиус окружности равен 10 см. Вычислим длину окружности и площадь круга, ограниченного этой окружностью.

- 1) Длина окружности равна: $C = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 10 = 62,8$ (см).
- 2) Площадь круга равна:

$$S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 10^2 = 3,14 \cdot 100 = 314 \text{ (см}^2\text{)}.$$

- 1029.** а) Чему равно отношение длины окружности к длине её диаметра?
 б) Чему равно отношение длины окружности к длине её радиуса?
- 1030.** Напишите формулу для вычисления:
 а) длины окружности; б) площади круга.
- 1031.** Вычислите длину окружности радиуса:
 а) 3 см; б) 0,06 м; в) 0,4 дм.
- 1032.** Вычислите площадь круга радиуса:
 а) 3 см; б) 4,6 дм; в) 0,2 м.
- 1033.** Как изменится длина окружности, если её радиус:
 а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 2 раза?
- 1034.** Как изменится радиус окружности, если её длину:
 а) увеличить в 5 раз; б) уменьшить в 7 раз?
- 1035.** Как изменится длина окружности, если её радиус:
 а) увеличить на 3 см; б) уменьшить на 3 см?
- 1036.** Как изменится радиус окружности, если её длину:
 а) увеличить на 6,28 см; б) уменьшить на 9,42 дм?
- 1037.** Как изменится площадь круга, если его радиус:
 а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 2 раза?
- 1038.** Сравните длины красной и синей линий, являющихся половинами окружностей (рис. 111).

Доказываем

- 1039.** Докажите, что ответ в предыдущей задаче не зависит от положения точки M на отрезке AB .

- 1040.** Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 112). Сторона квадрата равна 4 см, дуги — четвертые части окружности радиуса 4 см.

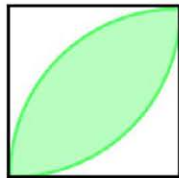
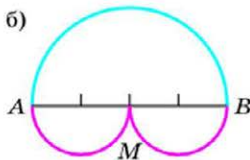
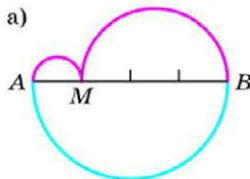


Рис. 111

Рис. 112

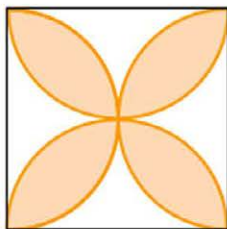


Рис. 113

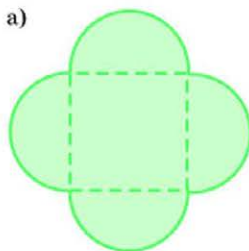
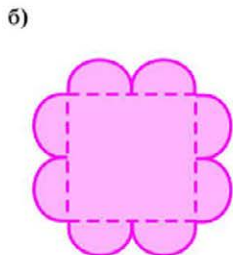


Рис. 114



- *1041. На сторонах квадрата как на диаметрах построили полуокружности внутри квадрата. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 113). Сторона квадрата равна 4 см.
- *1042. На сторонах квадрата как на диаметрах построили полуокружности вне квадрата. Получили первую фигуру (рис. 114, а). Потом каждую сторону такого же квадрата разделили на 2 равные части и на каждой из них как на диаметрах построили полуокружности вне квадрата. Получили вторую фигуру (рис. 114, б). Потом каждую сторону такого же квадрата разделили на 3 равные части и т. д. Вычислите периметр и площадь каждой из первых четырёх фигур, если сторона квадрата равна 12 см.
- *1043. Земной шар стянули обручем по экватору. Затем увеличили обруч на 1 м. Пролезет ли кошка в образовавшийся зазор?



5.8. Координатная ось

Зададим прямую, на которой выбрано направление, называемое положительным, и выбрана точка O , называемая начальной точкой. Зададим ещё отрезок, длину которого примем за единицу, — единичный отрезок.

Прямую, на которой выбрана начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют **координатной осью**.

На рисунке 115 координатная ось нарисована горизонтально с положительным направлением, идущим вправо от точки O . Но, вообще говоря, координатная ось может быть расположена вертикально или ещё как-нибудь и положительное направление на ней может быть выбрано так, как это может оказаться удобным.



Рис. 115

Начальная точка O делит координатную ось на два луча. Один из них, идущий от точки O в положительном направлении, называют положительным, другой — отрицательным.

Каждой точке координатной оси поставим в соответствие действительное число x по следующему правилу.

Начальной точке O поставим в соответствие число нуль. Точку O называют ещё начальной точкой координатной оси x . Точке A , находящейся на положительном луче, поставим в соответствие число x , равное длине отрезка OA : $x = OA$. Точке A , находящейся на отрицательном луче, поставим в соответствие отрицательное число x , равное длине отрезка OA , взятой со знаком \leftarrow : $x = -OA$.

Определённую таким образом координатную ось называют координатной осью x или коротко: осью x .

Число, соответствующее согласно указанному правилу произвольной точке оси x , называют координатой этой точки.

Впрочем, в этих названиях буква x может быть заменена любой другой буквой, например буквами y , z , t , ..., и тогда говорят об оси y , оси z и т. д.

Согласно указанному правилу:

1. Каждой точке оси x соответствует действительное число — координата этой точки.
2. Две различные точки A и B оси x имеют разные координаты x_1 и x_2 .
3. Каждое действительное число есть координата некоторой точки оси x .

Иначе говоря, установлено взаимно однозначное соответствие между точками оси x и действительными числами.

Положительный луч называют положительной координатной полуосью x , а отрицательный луч называют отрицательной координатной полуосью x .

Для краткости точку, имеющую координату x , называют точкой x .

Замечание. Ранее вводилось понятие координатной оси. Но там рассматривались только рациональные точки, т. е. точки, имеющие рациональные координаты x , и ось была «дырявая» — без иррациональных точек. Однако координата x произвольной точки координатной оси есть, вообще говоря, действительное число, т. е. оно может быть рациональным или иррациональным. Этот вопрос и был выяснен нами на основании общего понятия длины отрезка, введённого в п. 5.6. Теперь координатная ось перестала быть «дырявой» — каждой её точке соответствует действительное число.

- 1044.** Что называют координатной осью?
- 1045.** Что называют координатой точки на координатной оси?
- 1046.** Какие точки координатной оси называют:
а) рациональными; б) иррациональными?
- 1047.** Как надо понимать утверждение: множество всех точек координатной оси находится во взаимно однозначном соответствии со множеством всех действительных чисел?
- 1048.** Расположите координатную ось сначала горизонтально, потом вертикально. Отметьте на ней числа:
а) 2; 3; 4; 5; б) -1; -2; -3; -4.
- 1049.** Отметьте на координатной оси точки:
а) 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; б) 0; 1; -2; 3; -4; 5; -6; 7; -8.
- 1050.** Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком 1 см (2 клетки). Укажите на этой оси числа:
а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}$; б) $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{6}{2}, -\frac{7}{2}$.
- 1051.** Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком 5 см. Укажите на оси числа:
а) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9;
б) -0,1; -0,2; -0,3; -0,4; -0,5; -0,6; -0,7; -0,8; -0,9.
- 1052.** Начертите координатную ось и укажите на ней следующие числа, выбрав удобный для работы единичный отрезок и положение начальной точки координатной оси:
а) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{3}{4}$;
б) $\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -1, -1\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5}$;
в) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4$;
г) 0,5; -0,5; -1; 1,5; -1,5; -2; -2,5; -3; -3,5.

1053. Укажите на координатной оси точки:

- а) 10; 11; 12; 13; б) -25; -24; -23; -22;
в) 100; 101; 102; 103; г) -257; -256; -255; -254;
д) 60; 70; 80; 90; 100; е) -30; -20; -10; 0; 10.

1054. Укажите на координатной оси точки:

- а) 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; б) -3,2; -3,1; -3; -2,9; -2,8;
в) 0,01; 0,02; 0,03; г) -0,04; -0,05; -0,06;
д) 4,053; 4,054; 4,055; е) -10,01; -10,02; -10,03.

1055. Покажите на оси x числа, которые:

- а) больше 3; б) меньше -2;
в) больше 1,5; г) меньше 7,2;
д) больше 4; е) меньше -3;
ж) больше -1, но меньше 0; з) больше -2, но меньше 5;
и) больше 0, но меньше 2; к) больше -3, но меньше 3.

5.9. Декартова система координат на плоскости

Зададим на плоскости две оси координат, расположив их под прямым углом друг к другу, ось x и ось y — с точкой пересечения O , являющейся начальной точкой каждой из этих осей. Единичные отрезки осей возьмём равными друг другу.

Говорят, что этим на плоскости определена **прямоугольная система координат xOy** . Её называют ещё **декартовой системой координат** по имени французского математика и философа Р. Декарта (1596—1650), который первым широко использовал это важное понятие.

Ось x называют ещё **осью абсцисс**, а ось y — **осью ординат**. Точку O пересечения осей координат называют **начальной точкой системы координат**. Плоскость, на которой задана декартова система координат, называют **координатной плоскостью**.

Обычно ось абсцисс рисуют в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось ординат — в виде вертикальной прямой, направленной вверх (см. рис. 116 на с. 214).

Буквы x , y иногда заменяют другими буквами z , t , s , u , ...



Р. Декарт

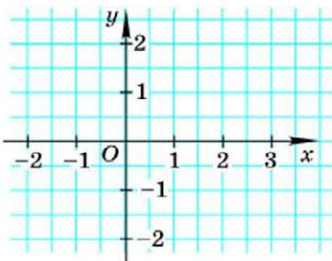


Рис. 116

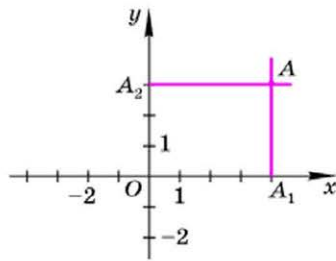


Рис. 117

Пусть A — произвольная точка координатной плоскости. Проведём через точку A прямые, параллельные осям координат (рис. 117). Прямая, параллельная оси y , пересечёт ось x в точке A_1 , а прямая, параллельная оси x , пересечёт ось y в точке A_2 . Координату точки A_1 на оси x называют абсциссой точки A . Координату точки A_2 на оси y называют ординатой точки A . Абсциссу x и ординату y точки A называют координатами точки A .

Координаты точки записывают в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: $A(x; y)$, причём на первом месте пишется абсцисса, а на втором месте — ордината. Например, точка A , изображённая на рисунке 117, имеет абсциссу $x=4$ и ординату $y=3$, поэтому пишут $A(4; 3)$.

На рисунке 118 изображена прямоугольная система координат xOy и точки: $O(0; 0)$, $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(-3; -2)$, $D(1; 0)$, $E(2; -2)$, $F(0; 4)$.

Прямоугольная система координат xOy разделяет плоскость на четыре угла, называемые координатными углами или координатными четвертями.

Их обозначают римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 119).

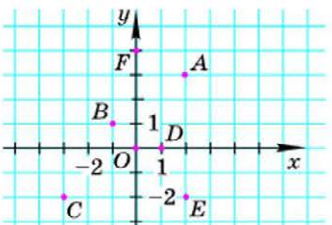


Рис. 118

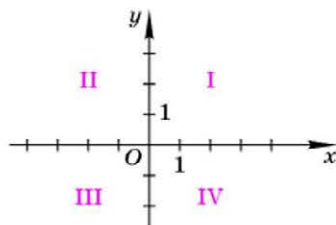


Рис. 119

Если исключить точки, лежащие на осях координат, то можно сказать, что точки:

угла I имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x > 0, y > 0$;

угла II имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x < 0, y > 0$;

угла III имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x < 0, y < 0$;

угла IV имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x > 0, y < 0$.

Например, точка $B(-1; 1)$ на рисунке 118 принадлежит углу II, точка $E(2; -2)$ принадлежит углу IV, точка $C(-3; -2)$ принадлежит углу III.

Легко видеть, что абсцисса точки равна нулю тогда и только тогда, когда эта точка лежит на оси y , ордината точки равна нулю тогда и только тогда, когда эта точка лежит на оси x .

Например, на рисунке 120 точка E лежит на оси y и имеет абсциссу $x = 0$; точка F лежит на оси x и имеет ординату $y = 0$.

Напомним ещё, что точка O — начальная точка системы координат. Она имеет обе координаты, равные нулю.

Важно отметить, что если на плоскости задана прямоугольная система координат, то каждой точке A плоскости приводится в соответствие пара чисел $(x; y)$ — пара координат точки A ; и в то же время произвольную пару чисел $(x; y)$ можно рассматривать как пару координат некоторой точки A плоскости.

Нужно иметь в виду, что если пара состоит из разных чисел, то, поменяв эти числа местами, мы получим другую пару, определяющую другую точку плоскости.

Абсциссу x точки A называют ещё **первой** координатой, а ординату y — **второй** координатой. Поэтому пару координат $(x; y)$ точки A называют упорядоченной парой чисел.

Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат xOy , то:

- 1) каждой точке плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (координаты точки);
- 2) разным точкам плоскости поставлены в соответствие разные упорядоченные пары чисел;
- 3) каждая упорядоченная пара чисел соответствует некоторой одной (в силу пункта 2) точке плоскости.

Иначе говоря, между точками плоскости и упорядоченными парами чисел имеет место взаимно однозначное соответствие.

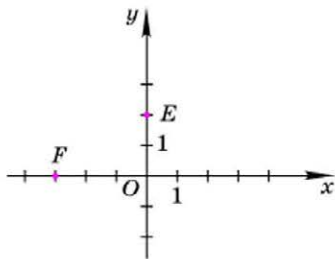


Рис. 120

Замечание. Точки $(x; y)$, где x и y — рациональные числа, называют рациональными точками координатной плоскости.

Рациональные точки полностью не заполняют плоскость, между рациональными точками на плоскости располагаются ещё и точки с иррациональными координатами.

- 1056.** На рисунке 121 изображены точки $A(2; 3)$, $B(0; 4)$, $C(3; 0)$, $D(-4; -2)$. Назовите абсциссу и ординату каждой точки. Запишите координаты точек M , N , K , L . В каких координатных углах расположены точки A , D , L , K ?
- 1057.** а) Где находятся точки, абсциссы которых равны нулю?
б) Где находятся точки, ординаты которых равны нулю?
- 1058.** Каким свойством обладают координаты точек I, II, III, IV четвертей?
- 1059.** В каких координатных углах находятся точки, абсциссы которых положительны?
- 1060.** В каких координатных углах находятся точки, ординаты которых положительны?
- 1061.** Как надо понимать утверждение: между точками координатной плоскости и упорядоченными парами чисел имеет место взаимно однозначное соответствие?
- 1062.** Определите координаты точек, изображённых на рисунке 122. Постройте систему координат и отметьте точки **(1063—1064)**:
- 1063.** $A(4; 3)$, $B(2; 4)$, $C(-5; 2)$, $D(4; -3)$,
 $E(-5; -1)$, $M(1; 3)$, $N(3; 0)$, $K(0; 4)$.
- 1064.** $A(5; 1)$, $B(-4; 2)$, $S(-3; -2)$, $Q(1; -4)$,
 $C(-5; -4)$, $D(4; -2)$, $Z(-3; 0)$, $P(0; 4)$.

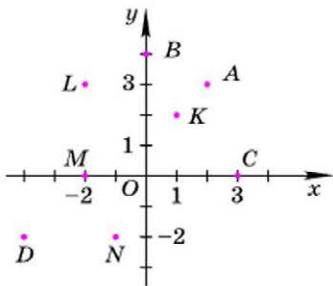


Рис. 121

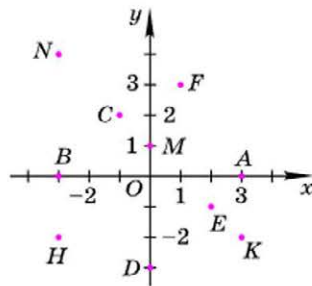


Рис. 122

1065. Назовите абсциссы и ординаты точек, постройте точки в системе координат:

а) $A(-3; 4)$, $B(4; -2)$, $C(-2; -4)$, $D(5; 2)$;

б) $E(0; 4)$, $F(0; -4)$, $M(3; 0)$, $N(-3; 0)$.

1066. Постройте в системе координат точки $(2; 1)$, $(2; 5)$, $(6; 5)$, $(5; 4)$, $(6; 3)$, $(2; 3)$. Соедините отрезками первую точку со второй, вторую с третьей и т. д. Какая фигура получилась?

1067. Постройте по данным точкам в системе координат фигуры, соединяя точки, как в предыдущем задании:

а) $(0; 4)$, $(-2; -2)$, $(3; 2)$, $(-3; 2)$, $(2; -2)$, $(0; 4)$;

б) $(2; 3)$, $(-2; 3)$, $(-2; 5)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$, $(2; 3)$, $(2; -5)$, $(0; -5)$, $(0; 3)$;

в) $(0; -4)$, $(0; 0)$, $(3; 3)$, $(6; 0)$, $(6; -4)$, $(0; -4)$, $(6; 0)$, $(0; 0)$, $(6; -4)$.

1068. Постройте фигуру животного по точкам: $(4; -3)$, $(2; -3)$, $(2; -2)$, $(4; -2)$, $(4; -1)$, $(3; 1)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(0; 0)$, $(-3; 2)$, $(-4; 5)$, $(0; 8)$, $(2; 7)$, $(6; 7)$, $(8; 8)$, $(10; 6)$, $(10; 2)$, $(7; 0)$, $(6; 2)$, $(6; -2)$, $(5; -3)$, $(4; -3)$, $(4; -5)$, $(3; -9)$, $(0; -8)$, $(1; -5)$, $(1; -4)$, $(0; -4)$, $(0; -9)$, $(-3; -9)$, $(-3; -3)$, $(-7; -3)$, $(-7; -7)$, $(-8; -7)$, $(-8; -8)$, $(-11; -8)$, $(-10; -4)$, $(-11; -1)$, $(-14; -3)$, $(-12; -1)$, $(-11; 2)$, $(-8; 4)$, $(-4; 5)$. Постройте отдельно две точки: $(2; 4)$, $(6; 4)$ — это глаза животного.

1069. Постройте отрезки AB и CD , если $A(-3; 4)$, $B(2; -1)$, $C(-2; 0)$, $D(4; 3)$. Найдите координаты точки пересечения отрезков AB и CD .

1070. Постройте прямые AB и CD , если $A(-1; 1)$, $B(1; 2)$, $C(-3; 0)$, $D(2; 1)$. Найдите координаты точки пересечения прямых AB и CD .

Придумываем задачу

1071. Придумайте задачу на построение фигур по точкам, заданным своими координатами.

5.10. Столбчатые диаграммы и графики

Чтобы сделать сравнение величин наглядным, их изображают на столбчатой диаграмме. Пусть результаты выполнения контрольной работы по математике в 6 классе заданы таблицей.

Оценка	«5»	«4»	«3»	«2»
Число учащихся	3	8	11	2

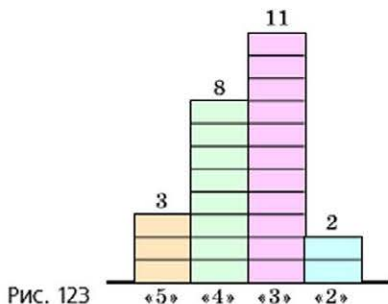


Рис. 123

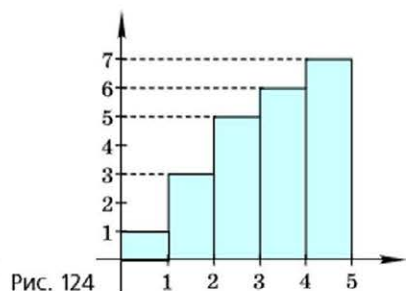


Рис. 124

Изобразим число учащихся, получивших оценки «5», «4», «3», «2», столбцами высотой 3, 8, 11 и 2 единицы (рис. 123). Получим диаграмму итогов контрольной работы.

С помощью диаграмм можно показывать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Пусть результаты измерения высоты цветка (в конце каждой недели) заданы таблицей.

Время, недели	1	2	3	4	5
Высота цветка, см	1	3	5	6	7

Изменение высоты цветка показано на столбчатой диаграмме (рис. 124). Столбики можно заменить отрезками (рис. 125). Если бы измерения высоты цветка проводились чаще, то отмеченных в системе координат точек (верхних концов отрезков) было бы больше и они расположились бы на кривой — графике роста цветка (рис. 126).

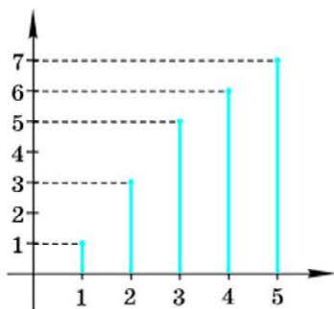


Рис. 125

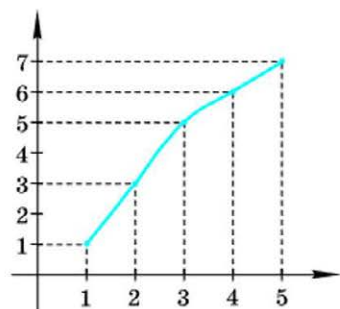


Рис. 126

В таблице указаны изменения температуры воздуха в течение суток.

Время (t), ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура (T), °C	-1	0	1	2	3	5	7	6	4	3	0	-2	-3

В системе координат tOT отмечены точки $(t; T)$, а затем они соединены. Получилась непрерывная линия — график изменения температуры воздуха в течение суток (рис. 127). По графику можно определить приблизительно температуру в любой момент времени t суток, например при $t=11$. Для этого надо через точку 11 оси t провести перпендикуляр к оси t до пересечения с графиком и определить значение T , соответствующее этой точке графика. Получим $T \approx 6,5$ °C.

Для получения графика изменения температуры на метеорологических станциях часто пользуются прибором, называемым термографом. Термограф состоит из барабана, вращающегося вокруг своей оси при помощи часового механизма, изогнутой коробки (чувствительной к изменению температуры) и пишущего устройства. При повышении температуры коробка разгибается, а прикрепленное к ней перо поднимается вверх. При понижении температуры перо опускается. Таким образом перо вычерчивает на движущейся бумажной ленте непрерывную линию — график изменения температуры воздуха в зависимости от времени.

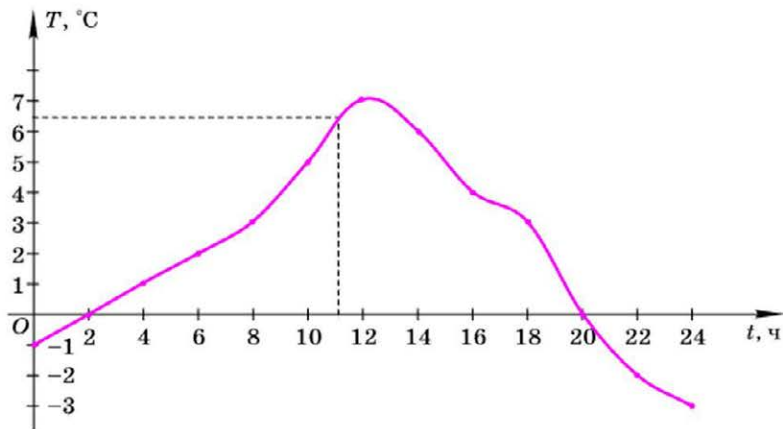


Рис. 127

Рассмотрим ещё один пример. Поезд вышел в 0 часов из пункта А. Данные о его движении приведены в таблице. (Здесь s — расстояние от пункта А до поезда в момент времени t .)

t , ч	0	1	2	3	4	5	6	7
s , км	0	100	200	300	300	400	500	600

Нанесём точки $(t; s)$ на координатную плоскость tOs и соединим их отрезками, считая, что единица длины на оси t соответствует часу, а единица длины на оси s соответствует 100 км (рис. 128).

Полученная ломаная есть график движения поезда. С его помощью можно приближённо определить, где находился поезд в моменты времени, например: $t = 0,5$ ч, $1,5$ ч, $2,5$ ч, $3,5$ ч.

Так, в момент $t = 0,5$ ч поезд находился на расстоянии 50 км от пункта А, так как точка графика, имеющая абсциссу $t = 0,5$, имеет ординату $s = 50$.

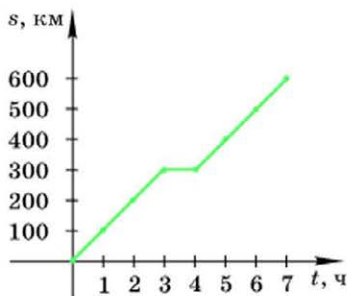


Рис. 128

- 1072.** Пользуясь столбчатой диаграммой (рис. 129), определите, сколько мальчиков и сколько девочек в 6 «А» и в 6 «Б» классах; сколько мальчиков и сколько девочек в двух этих классах; сколько девочек в двух этих классах; сколько всего учащихся в двух классах.

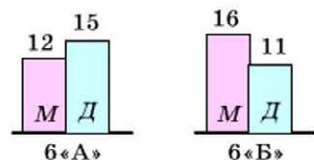


Рис. 129

- 1073.** В таблице приведены результаты выполнения контрольной работы по математике. Постройте столбчатую диаграмму, отражающую эти результаты.

Оценка	«5»	«4»	«3»	«2»
Число учащихся	4	10	12	2

- 1074.** На рисунке 130 показан график изменения температуры T (в градусах по Цельсию) воды в чайнике. Какой была температура воды через 3 мин, 5 мин, 7 мин после включения? В какой момент чайник выключили? Сколько минут он кипел?

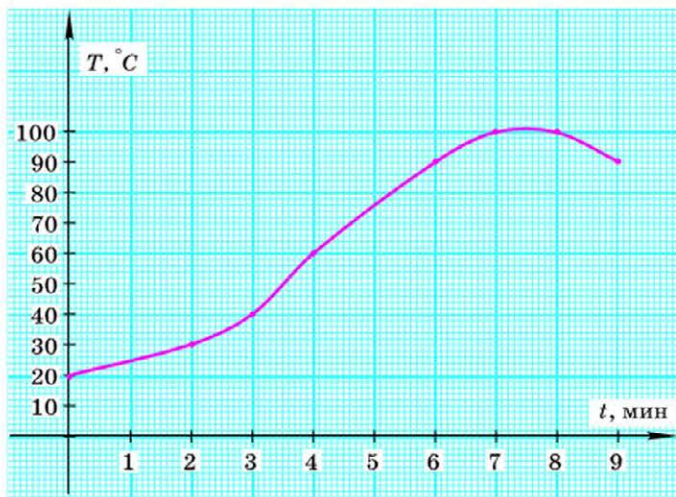


Рис. 130

1075. В 6 ч утра из посёлка на озеро, находящееся в 5 км от посёлка, отправились рыбачить отец и сын. Туда они пошли пешком, а обратно ехали на попутной машине. На рисунке 131 изображён график их движения. Определите с помощью графика:

- В какое время рыболовы пришли к озеру?
- Что они делали с 7 ч до 8 ч 45 мин?
- Сколько времени занял у них обратный путь?
- С какой скоростью они шли пешком?
- С какой скоростью ехала машина?

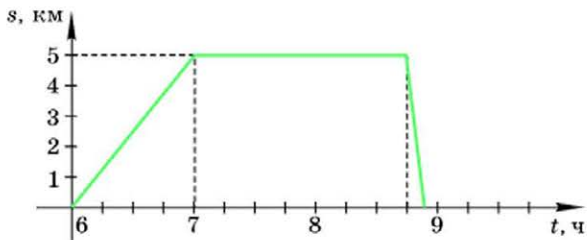


Рис. 131

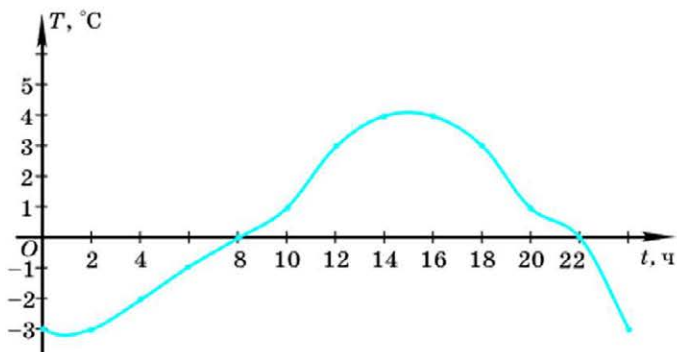


Рис. 132

***1076.** На рисунке 132 приведён график изменения температуры воздуха в течение суток. Измерения проводились через 2 ч.

- Какая температура была в 4 ч, 8 ч, 12 ч, 21 ч, 23 ч?
- В какие часы температура была выше 0°C ?
- В какие часы температура была ниже 0°C ?

***1077.** По данным, приведённым в таблице, постройте график изменения температуры воздуха: T — температура воздуха в градусах по Цельсию, t — время в часах.

t , ч	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
T , $^{\circ}\text{C}$	-6	-5	-4	-2	0	1	2	5	4	3	1	0	-2	-4

Сколько часов температура была выше 0°C ? ниже 0°C ?

***1078.** На рисунке 133 показан график движения двух пешеходов, вышедших из пунктов A и B навстречу друг другу.

- Через сколько часов после выхода первого пешехода из пункта A второй пешеход вышел из пункта B ?
- Через сколько часов после выхода первого пешехода из пункта A они встретились?
- С какой скоростью шёл первый пешеход?

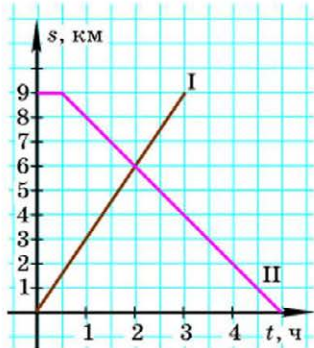


Рис. 133

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

1 ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ И РАЗРЕЗАНИЕ ФИГУР

Рассмотрим несколько задач, в которых речь идёт о фигурах, нарисованных на клетчатой бумаге так, что стороны этих фигур проходят только по линиям клеток. В этих задачах требуется или составить из таких фигур новую фигуру, или разрезать фигуру на несколько равных частей (разрезание возможно только по линиям клетчатой бумаги).

Фигуры домино, тримино, тетрамино, пентамино составляют из двух, трёх, четырёх, пяти одинаковых квадратов так, чтобы любой квадрат имел общую сторону хотя бы с одним квадратом. Из двух одинаковых квадратов можно составить только одну фигуру домино (рис. 134). В учебнике 5 класса (задача 589) было показано, что существует только две разные фигуры тримино (рис. 135).

Рис. 134

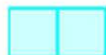
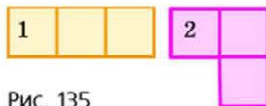


Рис. 135



Аналогично можно показать, что существует только 5 разных фигур тетрамино (рис. 136) и только 12 разных фигур пентамино (рис. 137).

На рисунке 137 показано одно из решений задачи-головоломки, придуманной в середине XX века американским математиком С. Голломбом. Задача заключается в том, чтобы из 12 разных фигур пентамино составить прямоугольник 6×10 . Эта задача имеет 2339 решений. Очевидно, что найти все эти решения, выполнив полный перебор, весьма трудно.

Интересно, что аналогичная задача для прямоугольника 4×5 и пяти разных фигур тетрамино не имеет ни одного решения. Для

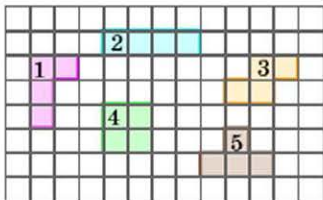


Рис. 136



Рис. 137

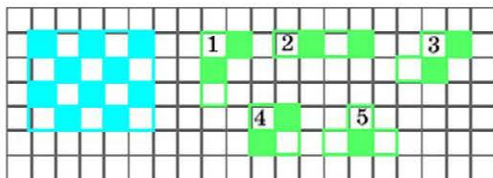


Рис. 138

доказательства этого утверждения раскрасим прямоугольник 4×5 и фигуры тетрамино в шахматном порядке (рис. 138). Число синих и белых квадратов в прямоугольнике одинаково. Если положить каким-то способом фигуры 1—4 на прямоугольник, останутся неизвестными 2 синих и 2 белых квадрата, которые невозможно занять фигурой 5 (объясните почему). Итак, прямоугольник 4×5 нельзя составить из фигур тетрамино.

Задача. Разрежем фигуру, изображённую на рисунке 139, на 4 равные части при условии, что резать разрешается только по сторонам клеток.

Заметим, что данная фигура содержит 16 квадратов, следовательно, 4 равные части фигуры будут содержать по 4 квадрата, поэтому искомые части данной фигуры — это фигуры тетрамино. Итак, надо покрыть данную фигуру одинаковыми фигурами тетрамино. Так как каждый квадрат должен быть покрыт какой-то фигурой тетрамино, то отметим одну из клеток фигурой звездочкой (например, верхнюю левую) и покроем её фигурами тетрамино всеми возможными способами так, чтобы фигура тетрамино оставалась внутри данной фигуры (рис. 140).

Нетрудно убедиться, что это можно сделать только четырьмя способами, используя фигуры 1, 3 и 4 тетрамино (рис. 140), и нельзя ни одним способом, используя фигуры 2 и 5. При этом случаи, когда фигура тетрамино занимает отмеченную клетку, но «изолирует» одну клетку данной фигуры (рис. 141), не рассматриваются (объясните почему).



Рис. 140

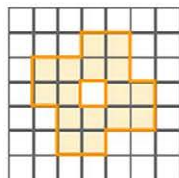


Рис. 139

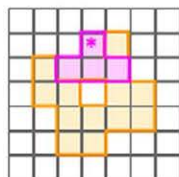


Рис. 141

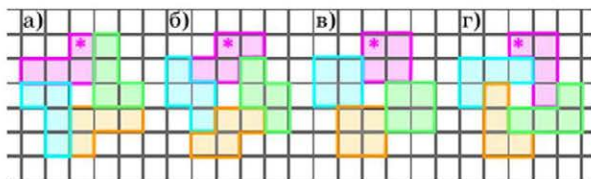


Рис. 142

Очевидно, что в каждом из этих четырёх способов данную фигуру можно разрезать на 4 равные части согласно условиям задачи единственным способом (рис. 142).

1079. У шахматной доски отрезали две противоположные угловые клетки (рис. 143). Можно ли эту доску разрезать на фигуры домино, покрывающие две клетки доски?

1080. Прямоугольник 2×4 состоит из 8 квадратов. Разрежьте прямоугольник на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов. Найдите три способа разрезания.

1081. Квадрат 4×4 состоит из 16 квадратов. Разрежьте его на: а) две; б) четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов. Сколько способов разрезания вы найдёте?

1082. Прямоугольник 4×6 состоит из 24 квадратов. Разрежьте его на шесть равных частей так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

1083. Разрежьте фигуру, состоящую из квадратов (рис. 144), на три равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

1084. Разрежьте фигуру, состоящую из квадратов (рис. 145), на четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

1085. Разрежьте фигуру, состоящую из квадратов (рис. 146), на четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

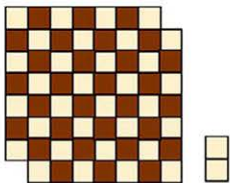


Рис. 143

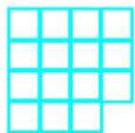


Рис. 144

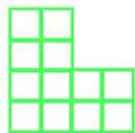


Рис. 145

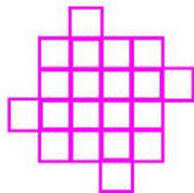


Рис. 146

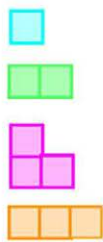


Рис. 147

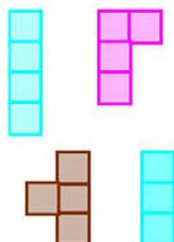


Рис. 148

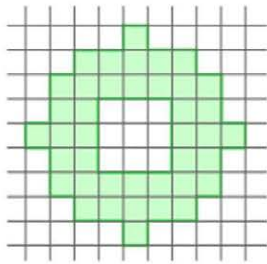
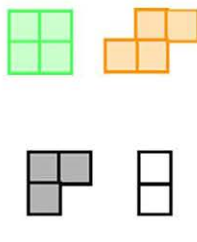


Рис. 149

ИССЛЕДУЕМ

1086. Из трёх различных фигур пентамино составьте прямоугольник 3×5 . Сколько различных решений имеет задача?

1087. Из фигур тримино, домино и одного квадрата (рис. 147) сложите квадрат 3×3 . Сколькими способами это можно сделать?

1088. Из фигур тетрамино, тримино и домино (рис. 148) составьте прямоугольник 4×7 . Найдите 10 различных решений.

1089. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке 149, на восемь равных частей так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

2 ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ



Задолго до нашей эры натуральными числами пользовались для счёта предметов и грубых измерений. Необходимость уточнения измерений привела к открытию дробных чисел.

Ещё древние греки рассматривали число как длину отрезка, знали, что такое отрезок рациональной длины. Но, занимаясь геометрией, они обнаружили также отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Например, длину диагонали квадрата (т. е. отрезка, соединяющего вершины, не принадлежащие одной его стороне) нельзя выразить рациональным числом, если длина стороны квадрата выражена числом 1 (об этом будет подробно рассказано в курсе алгебры средней школы).

Таким образом, при решении математических задач стали появляться иррациональные (нерациональные) числа. Иррациональными числами, например, являются числа, квадраты которых равны

соответственно 2, 3, 17. Примеры таких чисел знал, а может быть, впервые их открыл Пифагор — греческий математик (VI в. до н. э.).

В XVI веке итальянский математик Д. Кардано в своих исследованиях пользовался иррациональными числами, кубы которых равны целым числам.

Важную роль в математике играет число, равное отношению длины окружности к её диаметру. Обозначение этого числа греческой буквой π (пи) получило в XVIII веке широкое распространение после работ Л. Эйлера — академика Российской академии наук. Буква π есть начальная буква греческого слова «периферия» (окружность). Учёные вычисляли значение π с разной точностью. Так, греческий математик и механик Архимед (III в. до н. э.) знал, что π больше $3\frac{10}{71}$, но меньше $3\frac{1}{7}$:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Самаркандский математик аль-Каши (XV в.) выразил приближённое значение числа π шестидесятиричной дробью:

$$\pi \approx 3^{\circ}8'29''44'''.$$

Только в XVIII веке было доказано, что число π иррациональное. Список отдельных иррациональных чисел, которые возникали в исследованиях математиков более раннего времени, можно было бы продолжать. Однако к общему понятию действительного числа, выражающего длину произвольного отрезка, математики пришли сравнительно недавно — около ста лет назад.

Это понятие вводится в нашей книге с помощью десятичных дробей. Длина отрезка выражается десятичной дробью, вообще говоря, бесконечной. Обратное: любая десятичная дробь есть длина некоторого отрезка.

Длина отрезка тесно связана с понятием координатной оси.

Понятие числа в науке является одним из важнейших. От первых чисел, которые древние люди называли при подсчёте числа предметов, до введения обыкновенных и десятичных дробей прошли тысячи лет. Лишь с введением действительных чисел человечество получило мощное средство для изучения окружающего нас мира и развития науки и техники.



Л. Эйлер

- *1090. Купили конфеты и печенье. 1 кг конфет дороже 1 кг печенья на 50 %, но их купили на 50 % меньше, чем печенья. За что заплатили больше?

Решение. Пусть купили x кг печенья по y р. за 1 кг — всего на xy р. Тогда конфет купили $0,5x$ кг по $1,5y$ р. за 1 кг — всего на $0,5x \cdot 1,5y = 0,75xy$ р. Так как $xy > 0,75xy$, то за печенье заплатили больше, чем за конфеты.

- *1091. Мама не доверяет банкам и хранит сбережения дома. Крупная премия пролежала дома с зимы до лета. За это время цены в магазине выросли на 25 %. На сколько процентов уменьшилась покупательная способность отложенных денег?

Решение. Пусть на a р. зимой можно было купить одну единицу товара. Летом этот товар уже стоил $a + 0,25a = 1,25a$, т. е. летом на те же a р. можно купить $a : 1,25a = 0,8$ единицы того же товара. Это на $1 - 0,8 = 0,2$ единицы товара, или на 20 %, меньше, чем зимой. Покупательная способность отложенных денег уменьшилась на 20 %.

- *1092. Некто купил зимой акции АО NNN по 60 р. за акцию. К лету стоимость акций поднялась на 20 р. за акцию, а цены на товары за то же время увеличились на 20 %. На сколько процентов увеличилась покупательная способность денег, вложенных в акции?

- *1093. Мальчики составляют 45 % всех учащихся школы. Известно, что 30 % всех мальчиков и 40 % всех девочек учатся без троек. Сколько процентов всех учащихся школы учатся без троек?

- *1094. Рядовой Сидоров почистил бак картошки за 4 ч, и у него 20 % всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он начистит такой же (по массе) бак картошки?

- *1095. Когда подвели итоги голосования по половине всех бюллетеней, то оказалось, что объединение «Ананас» получило 10 % голосов избирателей. Подсчитайте, какое наибольшее и какое наименьшее число процентов голосов избирателей может набрать объединение «Ананас» на выборах после подсчета всех бюллетеней.

Доказываем

- 1096.** Дан отрезок AB . Провели две пересекающиеся окружности одинакового радиуса с центрами в точках A и B . Точки пересечения окружностей обозначили буквами M и N . Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой MN .
- 1097.** **Серединным перпендикуляром к отрезку** называют прямую, перпендикулярную отрезку и делящую его пополам. Докажите, что любая точка серединного перпендикуляра к отрезку одинаково удалена от концов этого отрезка.
- 1098.** **Задача Леонардо да Винчи.** Докажите, что если две равные окружности пересекаются друг с другом, то любая точка прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, одинаково удалена от того и другого центра.
- 1099.** Даны точки A и B . Постройте ось симметрии точек A и B .
- 1100.** Разделите отрезок пополам циркулем и линейкой.
- 1101.** Велосипедист проехал путь от A до B и обратно с некоторой постоянной скоростью. Пешеход прошёл путь от A до B со скоростью, в 2 раза меньшей скорости велосипедиста, но зато возвращался на автобусе со скоростью, в 4 раза большей скорости велосипедиста. Сколько времени затратил каждый из них на путь туда и обратно, если один был в пути на 0,5 ч дольше другого?
- 1102.** **Задача аль-Каши.** Плата работнику за 30 дней 10 динаров и платье. Он работал 3 дня и заработал платье. Сколько динаров стоит платье?
- 1103.** Из книги «Косс» К. Рудольфа (XVI в.). Некто согласился работать с условием получить в конце года одежду и 10 флоринов. Но по истечении 7 месяцев прекратил работу и при расчёте получил одежду и 2 флорина. Во сколько ценилась одежда?
- 1104.** Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Некий человек нанял работника на год, обещал ему дать 12 р. и кафтан. Но тот, отработав 7 месяцев, захотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Хозяин дал ему по достоинству расчёт 5 р. и кафтан. Спрашивается, а какой цены тот кафтан был.
- 1105.** Несколько работников получило 120 р. Если б их было четырьмя меньше, то каждый из них получил бы втрое больше. Сколько было работников?

1106. Принёс крестьянин на рынок продавать яйца. Подходит к нему торговец и спрашивает: «Сколько стоит десяток яиц?» Крестьянин ответил замысловато: «Двадцать пять яиц без полушки стоят пять полушек без пяти яиц». Сосчитайте, по какой цене продавал крестьянин десяток яиц. (Таблица старинных денежных единиц дана на форзаце учебника.)

1107. Двадцать пять яиц с полуденьгой стоят столько, сколько 3 деньги без 5 яиц. Сколько яиц приходится на 1 деньгу?

1108. Один араб перед смертью завещал трём своим сыновьям 17 верблюдов, с тем чтобы старший получил половину, средний — треть, младший — девятую часть всех верблюдов. После смерти отца сыновья никак не могли разделить верблюдов по завещанию, и они позвали главу племени. Этот глава приехал на собственном верблюде и, узнав, в чём дело, предложил присоединить к их верблюдам своего и поделить их по завещанию. Братья обрадовались предложению главы племени. Но каково же было их удивление, когда оказалось, что, выполнив в точности завещание отца, они получили на самом деле не 18, а 17 верблюдов, вследствие чего им пришлось вернуть главе племени его верблюда. Почему так получилось?

1109. Шли три путника с грузом.
— Если бы кто-нибудь сейчас продал нам мула, я бы отдал за него половину его стоимости, — сказал первый путник.
— А я бы добавил треть его стоимости, — сказал второй.
— И я добавил бы четверть, — произнёс третий.
Вдруг перед ними появился погонщик мулов, который согласился продать мула за 13 монет. Так как 13 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, то путники долго спорили, кто сколько монет должен дать. Тогда погонщик сказал:
— Я согласен, чтобы каждый из вас дал мне соответственно половину, треть и четверть не от 13, а от 12 монет. Каждый из путников понял, что даст меньше, чем обещал, и поэтому все они согласились на такое распределение платы за мула. Сколько монет получил погонщик?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Найдите значение числового выражения (1110–1116):

- 1110.** а) $14\,957 - (2586 + 4298)$; б) $598 \cdot 99 : 299$;
в) $758 \cdot 809 - 180\,492 : 356$; г) $682 - 480 : (123 + 37)$.
- 1111.** а) $795 \cdot 848 : 848$; б) $456 \cdot 759 : 759$;
в) $6111 : 679 \cdot 679$; г) $6768 : 846 \cdot 846$.
- 1112.** а) $48 - 48 : (17 - 9) + 40$; б) $54 - (48 - 39) \cdot 5 - 5$;
в) $67 - (62 - 38) : 6 - 4$; г) $48 : (31 - 19) : 2 + 2$.
- 1113.** а) $(7529 + 4356) + (644 + 1901)$; б) $753 + (2747 + 3998) + 1002$;
в) $(8935 + 6639) + (7361 + 125)$; г) $4957 + (8243 + 495) + 7205$.
- 1114.** а) $468 - 396 : (42 - 42 : 7) + 8$; б) $324 - 297 : (36 - 36 : 4) + 5$;
в) $4221 - 294 : (98 : 14 - 5)$; г) $5864 - 79 : (72 : 9 - 7) + 1001$.
- 1115.** а) $(756 \cdot 242 + 326 \cdot 9) \cdot 0$; б) $14\,304 : 596 \cdot (777 : 7 - 888 : 8)$.
- 1116.** а) $248 : 2 - 124 + 963 : 3 - 321 + 4$;
б) $808 : 8 - 909 : 9 + 424 : 2 - 636 : 3 + 5$.

Вычислите, применяя законы арифметических действий (1117–1118):

- 1117.** а) $239 \cdot 324 - 156 \cdot 315 + 156 \cdot 315$;
б) $31\,905 : 45 + 571 \cdot 33 - 33 \cdot 571$;
в) $22\,796 : 41 + 505 \cdot 707 - 22\,796 : 41$;
г) $896 \cdot 127 + 9702 : 77 - 127 \cdot 896$.
- 1118.** а) $35 + 33 + 31 + 29 + 27 + 25$;
б) $36 \cdot 35 - 35 \cdot 34 + 34 \cdot 33 - 33 \cdot 32 + 32 \cdot 31 - 31 \cdot 30 + 30 \cdot 29 - 29 \cdot 28 + 28 \cdot 27 - 27 \cdot 26 + 26 \cdot 25 - 25 \cdot 24$.
- 1119.** а) Вычислите:
 $7 \cdot 11$; $24 \cdot 101$; $378 \cdot 1001$; $7 \cdot 22 - 2 \cdot 77$; $24 \cdot 1313 - 13 \cdot 2424$.
б) Докажите, не выполняя всех вычислений, что:
 $275 \cdot 346\,346 - 346 \cdot 275\,275 = 0$;
 $1996 \cdot 19\,971\,997 - 1997 \cdot 19\,961\,996 = 0$.
- 1120.** Проверьте справедливость равенств:
 $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$; $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.
Используя данные равенства, вычислите:
а) $(10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2) : 365$; б) $(3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3) : 54$.
- 1121.** Проверьте справедливость равенств:
 $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$; $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$;
 $108^2 + 109^2 + 110^2 = 133^2 + 134^2$.
Используя данные равенства, вычислите:
а) $(1^3 + 6^3 + 8^3 + 9^3) : 27$; б) $(11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 + 20^3) : 1000$;
в) $(108^2 + 109^2 + 110^2 - 133^2 - 134^2) : 365$.

Найдите значение числового выражения (1122–1124):

1122. а) $-640 : (-80) - 560 : 7 + 490 : 7$; б) $-540 : 9 + (-450) : 5 + 160$;
в) $720 : (-36) - 840 : (-42) - 753$; г) $-860 : 20 - 625 : 25 + 75$.

1123. а) $222 : (-3996 : 54) + 333$; б) $256 \cdot (37 \cdot (-9) + 33) : (-1200)$;
в) $-2376 : (-625 : 25 + 49)$; г) $5100 : (-2279 : 53 + 26) \cdot (-17)$.

1124. а) $49 \cdot 68 + 51 \cdot 68 + 49 \cdot 12 + 51 \cdot 12$;
б) $87 \cdot 52 - 17 \cdot 52 + 87 \cdot 38 - 17 \cdot 38$;
в) $77 \cdot 99 + 23 \cdot 99 - 77 \cdot 29 - 23 \cdot 29$;
г) $108 \cdot 86 - 86 \cdot 18 - 108 \cdot 56 + 18 \cdot 56$;
д) $428 \cdot 356 + 72 \cdot 356 + 144 \cdot 428 + 72 \cdot 144$.

1125. Два ученика по очереди пишут цифры десятизначного числа.
а) Может ли второй ученик добиться того, чтобы это число делилось на 3, если первый старается ему помешать?
б) Может ли первый ученик добиться того, чтобы это число делилось на 9, если второй старается ему помешать?

***1126.** Делится ли число 12345678910111213...979899 на 3? на 9?

Доказываем

1127. Докажите, что если в трёхзначном числе средняя цифра равна сумме крайних, то число кратно 11.

***1128.** Разность двух нечётных чисел равна 8. Докажите, что эти числа взаимно простые.

1129. Чтобы узнать, является ли число 2503 простым, его стали последовательно делить на простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, На каком простом числе можно прекратить испытание?

1130. Из утверждений «А делится на 2», «А делится на 4», «А делится на 8», «А делится на 16» три верных, а одно неверное. Какое? Объясните ваш ответ.

***1131.** Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3?

1132. Сравните дроби $\frac{12}{13}$ и $\frac{16}{17}$, не приводя их к общему знаменателю.

1133. Сравните дроби: а) $\frac{2323}{6464}$ и $\frac{23}{64}$; б) $\frac{71}{98}$ и $\frac{7171}{9898}$.

Найдите значение числового выражения (1134–1141):

1134. а) $\frac{11}{15} \cdot \left(4 \frac{1}{2} - 3 \frac{2}{5} : \frac{17}{20}\right) + 1 \frac{11}{20}$; б) $5 \frac{4}{7} : 1 \frac{5}{21} - \left(5 \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{22} + 1 \frac{14}{15}\right)$;

в) $7 \frac{2}{3} + 4 \frac{1}{6} \cdot \left(6 \frac{2}{7} - 3 \frac{5}{7}\right)$; г) $4 \frac{2}{7} : 1 \frac{5}{21} + \left(4 \frac{3}{13} \cdot \frac{14}{15} - 3 \frac{1}{3}\right)$.

1135. а) $3\frac{3}{7} \cdot 3\frac{1}{2} : \left(1\frac{1}{11} - \frac{27}{55}\right)$; б) $\left(2\frac{1}{2} : 10 + 10 : 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{36}{125}$;

в) $3\frac{1}{8} : \left(\left(4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24}\right) \cdot \frac{4}{7} + \left(3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12}\right) \cdot 1\frac{10}{17}\right)$.

1136. а) $\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{6} + \frac{23}{24}\right) \cdot 177 : 118$; б) $129 \cdot \left(\frac{7}{9} + \frac{5}{6} + \frac{7}{18} + 5\right) : 86$;

в) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 3\right) \cdot 119 : 68$; г) $3456 : \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{8}{15} + 7\right) : 16$.

1137. а) $\left(\frac{1}{2} + \frac{11}{12} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) \cdot (-5) + (-756) : (-36)$;

б) $\left(\frac{19}{20} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right) \cdot (-123) - (-5092) : 76$.

1138. а) $256 : 48 - 156 : 36$; б) $399 : 49 + 664 : 56$;

в) $816 : 88 - 819 : 99$; г) $460 : 52 + 123 : 39$;

д) $\frac{48 : 7 - 45 : 14}{45 : 7 - 48 : 14}$; е) $\frac{56 : 13 + 100 : 26}{100 : 13 + 56 : 26}$.

1139. $\frac{3\frac{2}{3} + 1\frac{4}{7} : 13\frac{1}{3} - 3\frac{1}{13} : 5\frac{1}{2} + 1\frac{3}{8}}{3\frac{2}{3} - 1\frac{4}{7} : 13\frac{1}{3} + 3\frac{1}{13} : 5\frac{1}{2} - 1\frac{3}{8}}$

1140. а) $\frac{3\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2}}{2 : 3\frac{1}{5} + 3\frac{1}{4} : 13 : \frac{2}{3}}$; б) $\frac{15 : \frac{5}{18} : 3\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{16} + \frac{11}{36} + \frac{5}{48} + \frac{5}{18}\right)}{\left(11\frac{5}{11} - 8\frac{21}{22}\right) : 1\frac{2}{3}}$.

1141. а) $\frac{20 : 2\frac{2}{15} + 25\frac{5}{7} : 2\frac{2}{35}}{20\frac{7}{9} : 4\frac{2}{5} - \frac{5}{9}}$; б) $\frac{6\frac{3}{4} : 9 + 24 : \frac{6}{7} - \frac{1}{9} : \frac{4}{21}}{53\frac{2}{3} - 22\frac{14}{15} : 2\frac{2}{3}}$.

Сократите дробь (**1142–1143**):

1142. а) $\frac{36 \cdot 25}{50 \cdot 24}$; б) $\frac{38 \cdot 17}{34 \cdot 21}$; в) $\frac{64 \cdot 48}{56 \cdot 72}$; г) $\frac{38 \cdot 45}{60 \cdot 95}$;

д) $\frac{25 - 12}{12 \cdot 13}$; е) $\frac{26 + 13}{13 \cdot 26}$; ж) $\frac{7 + 28}{7 \cdot 28}$; з) $\frac{45 + 5}{5 \cdot 45}$.

1143. а) $\frac{(17 - 12) \cdot 8}{15 \cdot 16}$; б) $\frac{(25 - 9) \cdot 25}{75 \cdot (38 - 22)}$; в) $\frac{(41 - 5) \cdot 19}{(23 - 4) \cdot 36}$;

г) $\frac{17 \cdot 8 - 12 \cdot 8}{80}$; д) $\frac{25 \cdot 25 - 9 \cdot 25}{3 \cdot 50}$; е) $\frac{16 \cdot 23 + 9 \cdot 23}{17 \cdot 25 + 6 \cdot 25}$.

1144. Вычислите:

а) $\frac{45 \cdot 56 + 45 \cdot 14}{70 \cdot 72}$;

б) $\frac{38 \cdot 53 - 38 \cdot 25}{19 \cdot 42}$;

в) $\frac{395 \cdot 43 + 5 \cdot 43}{695 \cdot 86 + 86 \cdot 105}$;

г) $\frac{359 \cdot 23 - 59 \cdot 23}{758 \cdot 69 - 158 \cdot 69}$.

1145. Вычислите по образцу:

а) $742 \cdot 16 : 371 \cdot 5 : 80 = \frac{742 \cdot 16 \cdot 5}{371 \cdot 80} = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2$

б) $954 \cdot 35 : 742 : 9$;

в) $5292 : 63 : 28 \cdot 999$;

г) $4189 : 71 \cdot 26 : 118$;

д) $1125 \cdot 808 : 375 \cdot 33 : 1111$.

1146. Проверьте равенство:

а) $\frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{7}$;

б) $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = \frac{13}{30}$.

1147. Вычислите:

а) $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$;

б) $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$;

в) $\frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}$.

1148. а) Найдите натуральные числа x, y, z , для которых верно равенство

$$\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = \frac{7}{30}$$

б) Найдите целые числа x, y, z , для которых верно то же равенство.

1149. Вычислите:

а) $4,35 \cdot 3,08 - 16,119 : 4,05 + 0,95 \cdot 40$;

б) $(454,5 : 5 - 0,3636 : 0,09) : 4,343$.

Вычислите наиболее простым способом (1150–1152):

1150. а) $5759 + 43,25 + 6,75$; б) $42,3 + 7,29 + 57,7 + 0,51$;
в) $3,17 \cdot 125 \cdot 8$; г) $1,25 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2,5$.

1151. а) $2\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{5} \cdot \left(2\frac{1}{2} \cdot 5,4\right)$; в) $765 \cdot 59 + 235 \cdot 59$;

г) $\left(3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}\right) \cdot 12$; д) $4\frac{1}{2} \cdot 7\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}$; е) $42 \cdot 43,8 - 42 \cdot 3,8$.

1152. а) $\frac{4,8 \cdot 2,12 \cdot 0,25}{10,6 \cdot 0,96 \cdot 2,5}$; б) $\frac{3,2 \cdot 0,72 \cdot 5,05}{3,6 \cdot 6,4 \cdot 4,04}$;

в) $\frac{6,25 \cdot 0,49 \cdot 0,88}{7,7 \cdot 3,5 \cdot 0,125}$; г) $\frac{18,18 \cdot 6,8 \cdot 4,3}{0,86 \cdot 0,34 \cdot 9,09}$.

1153. Вычислите:

а) $(-24,3) : (4,5 - 4,5 \cdot (-0,8)) : 0,5$;
б) $12,5 \cdot (-3,6 + 3,6 \cdot (-1,5)) \cdot (-0,8)$.

Вычислите наиболее простым способом (1154–1155):

1154. а) $751 - 387 - 551 + 387 - 600$;
б) $(4,7 - 4,9) + (4,9 - 5,1) - (-5,1 - 5,3)$.

1155. а) $4,6 \cdot 7,3 + 5,4 \cdot 8,5 + 4,6 \cdot 8,5 + 5,4 \cdot 7,3$;
б) $9,8 \cdot 17,42 + 9,8 \cdot 5,58 - 1,8 \cdot 17,42 - 1,8 \cdot 5,58$;
в) $15,37 \cdot 7,88 - 9,37 \cdot 7,88 + 15,37 \cdot 2,12 - 9,37 \cdot 2,12$;
г) $4,54 \cdot 77,7 - 4,54 \cdot 7,7 + 7,46 \cdot 77,7 - 7,46 \cdot 7,7$;
д) $75,9 \cdot 42,3 - 65,9 \cdot 42,3 + 628 \cdot 1,77 - 528 \cdot 1,77$.

Вычислите (1156–1160):

1156. а) $\frac{1}{4} + 2,7$; б) $4,1 \cdot \frac{2}{5}$; в) $2,9 - 1\frac{3}{4}$; г) $4,5 : 2\frac{1}{2}$;

д) $3\frac{2}{3} - 0,25$; е) $2\frac{1}{7} \cdot 0,7$; ж) $\frac{1}{2} : 0,3$; з) $2\frac{1}{2} : 4,5$.

1157. а) $(1,545 : 1,5 - 1) \cdot 2\frac{2}{3} + 0,5 \cdot \frac{4}{15}$; б) $(2,678 : 1,3 - 2) \cdot 3\frac{1}{3} + 0,3 \cdot \frac{7}{15}$.

1158. а) $\frac{2}{7} : 8 + 5 : 0,7 - \frac{3}{4} : 2$; б) $3 : 4\frac{1}{5} + 5,4 : 7,2 - \frac{2}{7} : 0,8$;

в) $4,5 \cdot \frac{2}{3} - 1\frac{5}{7} : 1,2 + 3\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{8}$; г) $6,25 : \frac{5}{3} - 2,5 : 1,5 + 7\frac{1}{2} - 8\frac{1}{3}$.

1159. а) $\frac{\left(8\frac{1}{4} - 3,51\right) : 2,37}{\frac{1}{5} \cdot 3,17 - 2,205 : 3\frac{1}{2}}$; б) $\frac{\left(3\frac{1}{3} - 2,5\right) \cdot 6,6}{15,717 : 3,1 - \frac{1}{7} \cdot 0,49}$.

1160. а) $3\frac{3}{4} : 0,03 - 4,52 \cdot 8\frac{1}{2}$; б) $3\frac{3}{8} - \left(7\frac{1}{2} - 4,25\right) : \frac{9}{20}$;
 в) $3\frac{2}{5} : 5,1 - 4\frac{2}{3} : 6,3$; г) $-3\frac{3}{5} : 2,7 + 2,7 : 3\frac{3}{5}$.

1161. Вычислите наиболее простым способом:

а) $4,526 + 12\frac{1}{5} - \left(4\frac{2}{3} \cdot 1,8 + 4,526\right)$;
 б) $3\frac{1}{3} : 2,4 + 9,888 - \left(\frac{1}{18} + 7,888\right)$;
 в) $4,51 \cdot 3\frac{1}{2} - 7\frac{2}{3} - \left(-5,49 \cdot 3\frac{1}{2} + 10\frac{1}{3}\right)$;
 г) $4,573 + 2\frac{2}{7} \cdot 3\frac{1}{8} - \left(2,073 - 1\frac{5}{7} \cdot 3\frac{1}{8}\right)$.

1162. Вычислите:

а) $\left(15 : 3,75 + 10,5 : 1,5 \cdot \frac{3}{14}\right) : \left(1\frac{33}{52} - 1\frac{1}{4}\right)$;
 б) $(10 : 2,5 + 7,5 : 10) \cdot \left(\frac{3}{40} + \frac{7}{12} - \frac{157}{360}\right)$.

Решите пропорцию (**1163–1164**):

1163. а) $x : 7 = 5 : 8$; б) $x : 3 = 4 : 5$; в) $2 : x = 3 : 4$; г) $1 : x = 7 : 8$.

1164. а) $\frac{x}{9} = \frac{5}{7}$; б) $\frac{5}{x} = \frac{0,2}{3}$; в) $\frac{6x}{5} = \frac{18}{7}$;
 г) $7,5 : (2x) = 3 : 0,8$; д) $\frac{x-3}{5} = \frac{4}{7}$; е) $\frac{x+1}{3} = \frac{x-1}{2}$.

Упростите выражение (**1165–1168**):

***1165.** а) $4x - 5 + 1,5 + 2$; б) $8x - (3x + 5) + (2x - 9)$;
 в) $5(x - 0,4) - 7(2x + 1,5)$; г) $2,3x - (2,3x + 0,5) - 0,2(5x - 3)$.

***1166.** а) $3(x - 8) + 2(x + 3) + 24$; б) $3,2(2x + 1) + 1,6(4x + 2) + 1,7$;
 в) $2(x - 1) - 3(x - 2) + x$; г) $7,5(x - 4) - 2,5(3x - 12) + 5$.

***1167.** а) $2,4x + 1\frac{5}{7} - 2\frac{2}{3}x - 5$; б) $7,1x + (3,5 - x) - (5,9x - 1)$;
 в) $-3x - 2(x - 9) + 3\left(2x + \frac{2}{3}\right)$.

***1168.** а) $3(x - 5) + 5(x + 1) + 10$; б) $1,2(2x - 1) + 3,5(x - 2) + 10,2$;
 в) $5(x - 1) - 2(x + 3) - 3x$; г) $2,5(x - 0,2) - 5(2x - 0,4) + 0,5x$.

Найдите значение выражения (1169–1171):

- *1169. а) $5x - 39$ при $x = 10$; 0; 3; б) $-3,5x + 6$ при $x = 2$; -3 ; $0,4$;
в) $x - \frac{1}{3}$ при $x = 5$; $2\frac{1}{2}$; $-0,5$; г) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x$ при $x = 0,5$; -6 ; 4 .

- *1170. а) $25x - 50 + 44x - 88$ при $x = 2$;
б) $13x + 39 + 21x + 63$ при $x = -3$;
в) $128 - 4x + 356 - 8x$ при $x = 7$;
г) $121 - 11x + 456 - 10x$ при $x = 11$.

- *1171. а) $4,2x - 84 + 2,3x - 46 + x$ при $x = 20$;
б) $2,1x + 6,3 - 2,4x - 6,2 - 5$ при $x = -3$;
в) $3,2(x - 3,2) + 5,5(x - 2,2)$ при $x = 3,2$;
г) $6,3(x + 2,4) - 9,1(x + 1,4)$ при $x = -1,4$.

Решите уравнение (1172–1175):

1172. а) $4\frac{1}{2}x = 9,9$; б) $5,5x = -66$; в) $-3,6x = 14\frac{2}{5}$; г) $-2,2x = -4,84$.

1173. а) $3x = 5$; б) $0,7x = -2$; в) $-2,1x = 3,6$;
г) $6x - 7 = 0,2$; д) $0,6x + 0,5 = 3$; е) $-5x + 1,2 = -5,1$.

1174. а) $5x - 9 = 2,3x + 1$; б) $7,3x - \frac{1}{3} = -1,2x + 3$;
в) $6(x - 3) + 2(x + 2) = 1$; г) $5(x - 1) - 4(x - 2) = 10$;
д) $3(x - 9) + 5(x - 4) = 1$; е) $7(x - 9) - (3x + 1) = 9$.

1175. а) $4,5(x - 1) - 2,3(x + 2) = 2,1x$; б) $\frac{2}{3}(x - 5) + 1\frac{1}{3}(x + 1) = 9$;
в) $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 33$; г) $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$.

1176. а) $2(2x - 1) - 3(x - 2) = 6 + 4(3 - 2x)$;
б) $2(x + 2) - 3(x - 2) = 5 - 4(3x - 1)$.

1177. Бак вмещает 1000 л воды. Каждый день расходуют 600 л, а ночью доливают половину того количества, что находилось в баке утром. Хватит ли воды в баке на четверг, если утром в понедельник бак был полон?

1178. В булочную привезли 654 кг чёрного и белого хлеба. После того как продали 215 кг чёрного и 287 кг белого хлеба, того и другого сорта осталось поровну. Сколько чёрного и белого хлеба в отделимости привезли в булочную?



1179. В двух магазинах было 452 холодильника. После того как оба магазина продали холодильников поровну, в одном осталось 72, а в другом — 84 холодильника. Сколько холодильников было в каждом магазине первоначально?

1180. Первый цех железобетонных изделий расходует в день 25 т цемента. Сколько цемента расходует в день второй цех завода, если привезённых 870 т цемента хватит на 15 дней их совместной работы?

1181. Завод по плану должен изготовить 7920 приборов за 24 дня. За сколько дней завод выполнит это задание, если будет изготавливать в день на 30 приборов больше, чем намечено по плану?

1182. Токарь должен за 6 ч отточить 96 деталей. Применяя усовершенствованный резец, он может обтачивать в час на 8 деталей больше. Сколько времени сэкономит токарь на отточке 96 деталей, применяя усовершенствованный резец?

1183. Нужно проверить 360 тетрадей диктанта. Первый учитель может проверить за 15 ч, второй — за 10 ч, третий — за 6 ч. За сколько времени проверят они тетради втроём?

1184. *A*, *B* и *C* сыграли три партии, причём проигравший обязан был удваивать суммы, принадлежащие остальным в начале партии. Проиграли последовательно *A*, *B* и *C*, и в результате у всех троих оказалось по 48 р. Сколько денег было у каждого из них вначале?

1185. *A*, *B*, *C* и *D* сыграли четыре партии, причём проигравший обязан был удваивать суммы, принадлежащие остальным в начале партии. Проиграли последовательно *A*, *B*, *C* и *D*, и в результате у всех четверых оказалось по 48 р. Сколько денег было у каждого из них вначале?

1186. а) У крестьянина было несколько поросят и несколько ягнят. Три поросёнка и два ягнёнка весят 23 кг, а два поросёнка и три ягнёнка весят 22 кг. Сколько весят один поросёнок и один ягнёнок в отдельности?

б) В трёх маленьких и четырёх больших коробках 150 цветных карандашей, а в четырёх маленьких и трёх больших коробках 144 цветных карандаша. Сколько цветных карандашей в большой коробке?

1187. а) Скорость течения реки 2 км/ч. На сколько километров в час скорость лодки по течению реки больше скорости против течения? Зависит ли ответ от собственной скорости лодки?

б) Скорость лодки по течению реки больше скорости лодки против течения на 6 км/ч. Какова скорость течения?

1188. Расстояние, равное 3,6 км, проплыли по течению за 30 мин, а против течения за 40 мин. Определите скорость течения реки. За сколько часов это же расстояние проплывут плоты?

1189. Пассажир метро, стоящий на ступеньке эскалатора, поднимается вверх за 3 мин. За сколько минут поднимется пассажир, если будет идти вверх со скоростью 25 м/мин и длина эскалатора 150 м?

1190. Стоя неподвижно на ступени эскалатора метро, человек поднимается вверх за 1 мин. Тот же человек, избегая по ступеням неподвижного эскалатора, поднимается вверх за 40 с. За какое время тот же человек взбежит вверх по движущемуся эскалатору?

1191. Дачник пришёл от своей дачи на станцию как раз к отходу электрички. Если бы он на каждый километр тратил на 3 мин меньше, то пришёл бы на 12 мин раньше. Далеко ли от станции живёт дачник?

1192. а) Колонна автобусов с детьми длиной 1 км двигалась по шоссе со скоростью 50 км/ч. Автоинспектору, машина которого замыкала колонну, понадобилось подъехать к головному автобусу. Сколько минут уйдёт у инспектора на путь туда и обратно, если он будет ехать со скоростью 70 км/ч?

б) Колонна солдат длиной 250 м движется со скоростью 4,5 км/ч. Из конца колонны в её начало отправляется сержант со скоростью 5,5 км/ч, затем с той же скоростью он возвращается в конец колонны. Сколько минут затратит сержант на путь туда и обратно?

1193. а) Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу с двух станций, удалённых друг от друга на 520 км. Через какое время расстояние между поездами будет равно 65 км, если их скорости 60 км/ч и 70 км/ч?

б) Два поезда, расстояние между которыми 685 км, вышли одновременно навстречу друг другу. Через какое время расстояние между поездами будет равно 95 км, если их скорости 55 км/ч и 45 км/ч?

1194. После четырёх стирок от куска мыла осталась только третья часть. На сколько стирок хватит оставшейся части?

1195. Двум ученикам поручено подклеить в библиотеке несколько книг. Когда они закончили работу, то первый сказал, что подклеил $\frac{3}{5}$ всех книг, а второй сказал, что подклеил $\frac{2}{3}$ всех книг.

Их товарищ заметил, что ребята ошиблись в расчётах. Как он догадался?

1196. В классе каждый ученик выполнил нормативы по бегу или по метанию мяча. Половина класса сдала норматив по бегу, $\frac{2}{3}$ класса — по метанию мяча. Какая часть класса выполнила нормативы и по бегу, и по метанию мяча?

1197. Часть студентов института изучает английский язык, часть — французский. Какая часть студентов изучает оба языка, если $\frac{3}{4}$ всех студентов изучает английский и $\frac{1}{3}$ — французский?

1198. Масса наибольшего количества соли, которое растворяется в воде, составляет $\frac{9}{25}$ массы воды. Сколько килограммов соли растворится в $\frac{5}{6}$ ведра воды, если ведро вмещает 12 кг воды?

1199. Из «Арифметики» Л. Н. Толстого. Муж и жена брали деньги из одного сундука, и ничего не осталось. Муж взял $\frac{7}{10}$ всех денег, а жена 690 р. Сколько было всех денег?

1200. Купивши комод за 36 р., я потом вынужден был продать его за $\frac{7}{12}$ цены. Сколько рублей я потерял при этой продаже?

1201. Мастер сплавил 3 куса серебра в $\frac{1}{4}$ фунта, в $\frac{1}{6}$ фунта и в $\frac{1}{8}$ фунта, сделал из него ложки и продал их. Сколько получил он денег, если фунт серебра ценил в 24 р. да за работу взял 8 р.?



1202. Из первого крана за 2,5 мин наливается столько воды, сколько из второго за 3 мин. За сколько минут можно наполнить бак объёмом 66 л через эти два крана, если через второй кран в минуту наливается 15 л воды?

1203. Одна бригада за день выполняет $\frac{1}{6}$ задания, другая — $\frac{1}{12}$ задания. За сколько дней при совместной работе бригады выполнят это задание?

1204. Через одну трубу за минуту наполняется $\frac{1}{50}$ бассейна, через другую — $\frac{1}{75}$ бассейна. За сколько минут бассейн наполнится через обе трубы?

1205. а) Заготовленного корма хватило бы корове на 60 дней или овцам на 90 дней. Рассчитайте, на сколько дней хватит заготовленного корма и корове, и овцам вместе.

б) Крестьянин подсчитал, что заготовленного сена хватит для коровы на 80 дней или для овец на 120 дней. Рассчитайте, на сколько дней хватит заготовленного сена и корове, и овцам вместе.

1206. Из села в город вышел пешеход. Одновременно с ним из города в село выехал велосипедист. Пешеход пришёл в город через 6 ч, а велосипедист приехал в село через 3 ч. Через сколько часов после начала движения они встретились?

1207. Из пункта *A* в пункт *B* отправили плот вниз по реке. Одновременно с ним из пункта *B* в пункт *A* вышел катер, который прибыл в пункт *A* через 5 ч. Через сколько часов катер встретил плот, если плот прибыл в пункт *B* через 20 ч после начала движения?

1208. Опытный токарь выполнит задание за 1 ч 20 мин, а его ученик — за 4 ч. За сколько минут они выполнят задание при совместной работе?

1209. Первый турист может пройти расстояние между городами за 4 ч, а второй — за 6 ч. Как-то раз они вышли одновременно из этих городов навстречу друг другу. Хватит ли им 2,5 ч на движение до встречи?

1210. Первая бригада может выполнить задание за 5 недель, а вторая — за 3 недели. Хватит ли им двух недель на выполнение задания при совместной работе?



1211. Задача Я. И. Перельмана. Переписка доклада поручена двум машинисткам. Более опытная из них могла бы выполнить всю работу в 2 ч, менее опытная — в 3 ч. Во сколько времени перепишут они доклад, если разделят между собой работу так, чтобы выполнить её в кратчайший срок?

1212. Имеющихся денег хватит на школьные завтраки на 24 учебных дня или на обеды на 12 дней. На сколько дней хватит этих денег, если завтракать и обедать в школе?

1213. Мама с дочкой потратили на уборку квартиры 30 мин. Одна мама убрала бы квартиру за 50 мин. За сколько минут убрала бы квартиру дочь?



1214. (Греция.) Бассейн наполняется четырьмя трубами, из которых первая может наполнить бассейн за 1 день, вторая — за 1 день, третья — за 3, четвёртая — за 4. За какое время наполнится бассейн через четыре трубы?

1215. Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B и встретились через 3 ч. Ещё через 2 ч легковая машина прибыла в город B . За сколько часов грузовая машина доехала от города B до города A ?

1216. В хозяйстве под картофель занята площадь в 3 раза большая, чем под капусту. Под капусту занято на 36 га меньше, чем под картофель. Какая площадь занята под картофель?

1217. Первая глава книги содержит в 3 раза меньше страниц, чем две другие, вместе взятые. Три главы вместе содержат 276 страниц. Сколько страниц в первой главе?

1218. Мост длиной 324 м имеет четыре пролёта, из которых два в 2 раза короче двух других, имеющих одинаковую длину. Определите длины пролётов моста.

1219. Кенгуру прыгает в длину на расстояние, в 4 раза большее, или на 9 м большее, чем в высоту. На какое расстояние кенгуру прыгает в длину?

1220. Слон в 5 раз тяжелее белого медведя. Белый медведь на 3,6 т легче слона. Сколько весит каждое животное?

1221. Для участия в эстафете ребята разделились на две команды. Чтобы участников эстафеты в командах стало поровну, учитель перевёл 3 человека из одной команды в другую. На сколько человек первоначально в одной команде было больше, чем в другой?



1222. У Саши и Вити вместе 160 марок. После того как Саша дал Вите 15 марок, а Витя дал Саше 19 марок, число марок у мальчиков стало одинаковым. Сколько марок было у каждого мальчика первоначально?

1223. В двух мешках 250 телефонных жетонов. Если из одного мешка переложить в другой 25 жетонов, то количества жетонов в мешках сравняются. Сколько жетонов в каждом мешке?

1224. а) Сумма числителя и знаменателя дроби равна 32, числитель на 2 меньше знаменателя. Найдите эту дробь.
б) Числитель на 8 больше знаменателя, сумма числителя и знаменателя равна 34. Найдите эту дробь.

1225. Между городами A и B расстояние 331 км. На пути из A в B есть город C , расстояние от которого до города A на 17 км больше, чем до города B . Найдите расстояние от A до C и от B до C .

- 1226.** а) Книга в переплёте стоит 5 р. Книга на 4 р. дороже переплёта. Сколько стоит переплёт?
б) Бутылка масла стоит 10 р. Масло на 9 р. дороже бутылки. Сколько стоит масло?
- 1227.** Три доярки обслуживают на ферме 125 коров. Сколько доярок потребуется для обслуживания 625 коров при той же норме?
- 1228.** С конвейера автозавода каждые полторы минуты сходит один автомобиль. Сколько автомобилей выпускает завод за 1 ч?
- 1229.** На некотором участке заменили старые рельсы длиной 8 м новыми рельсами длиной 12 м.
а) Сколько потребуется новых рельсов, если сняли 240 старых рельсов?
б) Сколько сняли старых рельсов, если установили 240 новых рельсов?
- 1230.** Колесо, окружность которого 1,5 м, сделало на некотором расстоянии 96 оборотов. Сколько оборотов на том же расстоянии делает колесо, окружность которого 2,4 м?
- 1231.** Для 16 голов скота на 36 дней требуется 1,92 т сухой подстилки. Сколько сухой подстилки требуется для 20 голов скота на 40 дней?
- 1232.** Из A в B вышел пешеход со скоростью 4,8 км/ч. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч, который доехал до A , повернул назад и поехал с той же скоростью. Догонит ли велосипедист пешехода до его прихода в B ?
- 1233.** а) За 1 ч бригада маляров покрасила половину стены дома. Оставшуюся часть стены покрасил один человек за 4 ч. Сколько маляров в бригаде?
б) Бригада за полдня выполнила $\frac{3}{4}$ задания. Оставшуюся часть задания выполнил один человек за полдня. Сколько человек в бригаде?
в) Бригада плотников выполнила $\frac{3}{5}$ задания за полдня. Оставшуюся часть задания выполнил один плотник за день. Сколько плотников в бригаде?
г) *Задача Л. Н. Толстого.* Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: одна половина осталась на первом луге и к вечеру его докосила, а другая — перешла косить на второй луг, площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшуюся часть работы выполнил один косец?

1234. 10 ветряных мельниц смололи 200 четвертей ржи в 12 дней, работая в день по 14 ч. По сколько часов в день должны работать 8 таких же мельниц, чтобы в 21 день смолоть 300 четвертей ржи?



1235. а) Картофель содержит 20 % крахмала. Сколько картофеля надо взять для получения 200 кг крахмала?

б) При помоле ржи получается 75 % муки. Сколько ржи надо взять, чтобы получить 200 кг муки?

в) При помоле пшеницы получается 80 % муки. Сколько пшеницы надо взять, чтобы получить 200 кг муки?

г) Получаемый при сушке винограда изюм составляет 32 % от массы винограда. Из скольких килограммов винограда получится 4 кг изюма?

1236. а) Найдите число, 20 % которого составляют 50 % от 200.

б) Найдите число, 10 % которого составляют 60 % от 300.

1237. В 800 г воды растворили 20 г соли. Какова концентрация раствора в процентах?

1238. а) Рубашка стоила 150 р. После снижения цены она стоит 120 р. На сколько процентов снижена цена рубашки?

б) Товар стоил 690 р. После снижения цены он стоит 621 р. На сколько процентов снижена цена товара?

***1239.** Агроном подсчитал, что имеющиеся в хозяйстве удобрения составляют 80 % того, что потребуется в текущем году. На сколько процентов надо увеличить имеющийся запас удобрений, чтобы полностью обеспечить потребности хозяйства?

1240. Два мальчика собрали 420 марок, и у одного из них оказалось на 10 % больше марок, чем у другого. Сколько марок было у другого?

1241. На заводе 35 % всех работающих — женщины, а остальные — мужчины, которых на 504 человека больше, чем женщин. Сколько всего рабочих на заводе?

1242. а) Разность чисел равна 20. Одно из них больше другого на 40 %. Найдите меньшее число.

б) Разность чисел равна 20. Одно из них меньше другого на 40 %. Найдите меньшее число.

1243. В коллекции имеется 12 жуков и пауков. У всех вместе у них 80 ног. Сколько в коллекции жуков и сколько пауков? (У жука 6 ног, у паука 8.)

1244. *Задача Д. Лойи.* Торговец продаёт орехи двух сортов: одни по 90 центов, другие по 60 центов за килограмм. Он хочет получить 50 кг смеси по 72 цента за килограмм. Сколько для этого потребуется орехов каждого сорта?

1245. Пешеход прошёл расстояние между сёлами со скоростью 4 км/ч. Если бы он проходил в час на 1 км больше, то ему потребовалось бы на тот же путь на 1 ч меньше. Сколько времени шёл пешеход и какой путь он прошёл?

1246. Поезд прошёл расстояние между двумя городами со скоростью 80 км/ч. Если бы его скорость была на 20 км/ч меньше, то ему потребовалось бы на эту поездку на 1 ч больше. Найдите расстояние между двумя городами.

1247. Тракторист может вспахать поле за 5 дней. Увеличив выработку на 2,5 га в день, он выполнил работу за 4 дня. Какова площадь поля?

1248. Чтобы выполнить задание к сроку, цех должен был в день изготавливать по 30 приборов. Повысив производительность труда, рабочие цеха стали изготавливать в день по 34 прибора и выполнили задание на 2 дня раньше срока. Сколько приборов нужно было изготовить по плану и за сколько дней?

1249. Завод получил заказ на изготовление некоторого числа машин к определённому сроку. Если завод будет выпускать ежедневно по 250 машин, то к сроку будет изготовлено на 1000 машин меньше, чем заказано. Если же завод будет выпускать ежедневно по 320 машин, то к сроку будет изготовлено на 400 машин больше, чем заказано. Сколько машин надо изготавливать в день, чтобы выполнить заказ в срок?



1250. Если раздать учащимся по 1 тетради, останется 36 тетрадей, а если раздать по 3 тетради, не хватит 12. Сколько тетрадей и сколько учащихся?

1251. Ученики собираются выпустить газету. Если они соберут с каждого по 15 к., то им не хватит 2 р., а если каждый внесёт по 25 к., то получится лишних 2 р. Сколько было учеников? Сколько стоит подписка на газету?

1252. (*Китай, I в.*) Сообща покупают вещь. Если каждый человек внесёт по 8 (денежных единиц), то избыток равен 3. Если каждый человек внесёт по 7, то недостаток равен 4. Спрашивается количество людей и стоимость вещи.

- 1253.** (Китай, II в.) Сообща покупают курицу. Если каждый человек внесёт по 9 (денежных единиц), то останется 11, если же каждый внесёт по 6, то не хватит 16. Найти число людей и стоимость курицы.
- 1254.** Задача Я. И. Перельмана. Двое очистили 400 штук картофеля; один очищал 3 штуки в минуту, другой — 2. Второй работал на 25 мин больше, чем первый. Сколько времени работал каждый?
- 1255.** Слон может бежать со скоростью, на 25 км/ч большей, чем медведь. Скорость медведя составляет $\frac{2}{7}$ скорости слона. С какой скоростью может бежать каждое животное?
- 1256.** Первая бригада может выполнить задание за 56 ч, а вторая — за 112 ч. Мастер рассчитал, что работу можно организовать так, что сначала над выполнением задания будет работать первая бригада несколько дней (по 8 ч), а затем — вторая. При этом задание будет выполнено за 8 дней. Сколько дней должна работать каждая бригада?
- 1257.** На пришкольном участке один класс окопал $\frac{7}{20}$ всех деревьев, другой — $\frac{3}{5}$ остатка, а третий — остальные 52 дерева. Сколько деревьев на пришкольном участке?
- 1258.** Рабочий израсходовал $\frac{2}{35}$ зарплаты на уплату за квартиру, $\frac{5}{22}$ оставшихся денег на покупку вещей. После этого у него осталось на 320 р. больше, чем он израсходовал. Какова зарплата рабочего?
- 1259.** В два магазина завезли яблок поровну. В первом магазине продали треть всех яблок и ещё 30 кг, во втором магазине продали четверть всех яблок и ещё 40 кг. После чего оказалось, что яблок в магазинах продали поровну. Сколько яблок завезли в каждый магазин первоначально?
- 1260.** В нашем классе мальчиков и девочек поровну. На школьный вечер пришли половина всех мальчиков и ещё 3 мальчика, треть всех девочек и ещё 6 девочек. Оказалось, что на школьный вечер пришло мальчиков и девочек поровну. Сколько всего учащихся в нашем классе?
- 1261.** На вопрос: «Который час?» — был дан ответ: « $\frac{2}{5}$ прошедших часов от полуночи до сего времени равны $\frac{2}{3}$ часов, оставшихся до полудня». Спрашивается, сколько сейчас времени.

1262. Верёвку длиной 28 м надо разрезать на 3 части так, чтобы вторая часть была в 3,5 раза, а третья — в 2,5 раза больше первой. Найдите длину каждой части.

1263. Один человек спросил своего приятеля:

— Сколько лет моему сыну?

— Если к возрасту моего сына прибавить столько же да ещё половину, то будет 10 лет. Сколько же лет сыну?

1264. Одного человека спросили: «Сколько Вам лет?» На что он ответил: «Когда я проживу ещё половину, да треть, да четверть моих теперешних лет, тогда мне будет 100 лет». Сколько лет этому человеку?



1265. Летит стая гусей и навстречу ей один гусь.

— Здравствуйте, сто гусей! — сказал гусь.

— Нас не сто, — ответил вожак стаи. — Вот если бы нас было столько, ещё столько, да полстолько, да четверть столько, да ещё ты, гусь, с нами — вот тогда бы нас было сто гусей. Сколько гусей было в стае?

1266. У мальчика в коллекции было 210 российских марок и 65 иностранных. Когда ему подарили ещё 25 марок, то российских марок стало в 3 раза больше, чем иностранных. Сколько российских марок подарили мальчику?

1267. Отцу 32 года, сыну 8 лет. Через сколько лет отец будет:

а) в 3 раза старше сына; б) в 5 раз старше сына?

1268. Брату 12 лет, он в 3 раза старше своей сестры. Через сколько лет он будет в 2 раза старше своей сестры?

1269. а) Сейчас мама в 8 раз старше своей дочери, а через 4 года она будет старше дочери в 4 раза. Сколько лет дочери сейчас?

б) Брат в 3 раза старше сестры, а через 5 лет он будет в 2 раза старше сестры. Сколько сейчас лет брату и сколько лет сестре?

1270. Отец старше сына на 24 года. Сейчас он старше сына в 3 раза. Через сколько лет отец будет:

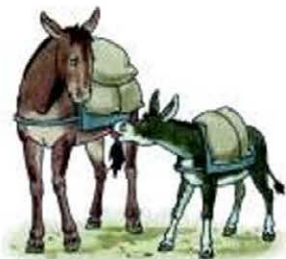
а) в 2 раза старше сына; б) в 5 раз старше сына?

1271. В двух бидонах 70 л молока. После того как из каждого бидона продали по 20 л молока, в одном осталось в 2 раза больше молока, чем в другом. Сколько молока было в каждом бидоне первоначально?

1272. Двое ели сливы. Один сказал другому: «Дай мне свои две сливы, тогда у нас слив будет поровну», на что другой ответил: «Нет, лучше ты дай мне свои две сливы — тогда у меня будет в два раза больше, чем у тебя». Сколько слив у каждого?

1273. *Задача Бхаскары.* Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай ты мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько было у каждого?

1274. *(Греция.)* Ослица и мул шли вместе, нагруженные мешками равного веса. Ослица жаловалась на тяжесть ноши. «Чего ты жалуешься, — сказал мул, — если ты мне дашь один твой мешок, моя ноша станет вдвое больше твоей, а если я дам тебе один мешок, наши грузы только сравняются». Сколько мешков было у каждого?



1275. *Задача Л. Эйлера.* Мул и осёл несли груз весом в несколько сотен каких-то единиц. Осёл, жалуясь на свою судьбу, сказал мулу: «Мне нужно только сто единиц твоей ноши, чтобы моя стала вдвое тяжелее твоей». На это мул ему ответил: «Да, это так, но если бы ты мне отдал сто единиц из твоей ноши, то я был бы нагружен втрое больше тебя». Какого веса была ноша осла и ноша мула?

1276. Мне теперь вдвое больше лет, чем было тогда, когда мой брат был в моём возрасте. Когда мне будет столько лет, сколько теперь брату, то нам вместе будет 98 лет. Сколько лет каждому?

1277. Кузнечик прыгает по прямой большими прыжками по 12 см и малыми прыжками по 7 см. Сможет ли кузнечик из одной точки прямой попасть в другую, если расстояние между ними 3 см?

1278. Кузнечик прыгает по плоскости в любом направлении прыжками по 12 см. Сможет ли кузнечик из одной точки плоскости попасть в другую, если расстояние между ними 10 см?

1279. Разрежьте прямоугольник по прямой линии на две части так, чтобы из них можно было сложить треугольник. Найдите два различных решения задачи.

1280. а) Тротуар шириной 3 м и длиной 60 м выстилают бетонными плитами, каждая из которых имеет форму квадрата со стороной 50 см. Сколько потребуется плит?

б) Пол в ванной комнате выстилают керамическими плитками, каждая из которых имеет форму квадрата со стороной 12 см. Сколько нужно купить упаковок плиток по 48 плиток в каждой, если размеры пола ванной комнаты 1 м 80 см и 1 м 50 см? Учтите, что в ванной комнате мастера делают бортик высотой в полплитки и умеют резать керамические плитки на части.

1281. а) Коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Её длина равна 28 см, ширина составляет 0,5 длины, а высота составляет $\frac{1}{7}$ ширины. Найдите объём коробки.

б) Длина строительного кирпича 25 см, ширина составляет 0,48 длины, а высота составляет 0,26 длины. Выразите объём кирпича в кубических дециметрах.

1282. В килограммовой пачке сахара содержится 180 кусков сахара. Какова масса каждого куска?

1283. Выразите объём пачки сахара, размеры которой 5,5 см, 11,5 см и 17,5 см, в кубических дециметрах. Ответ округлите до сотых.

1284. а) Можно ли написать 45 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

б) Можно ли написать 55 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

1285. а) В коробке лежат 5 красных и 5 зелёных карандашей. Какое наименьшее число карандашей нужно взять из коробки не глядя, чтобы среди них оказалось 2 карандаша одного цвета? 2 карандаша разных цветов?

б) В коробке лежат 5 красных, 5 зелёных и 5 синих карандашей. Какое наименьшее число карандашей нужно взять из коробки не глядя, чтобы среди них оказалось 2 карандаша одного цвета? 2 карандаша разных цветов?

1286. Студент за 5 лет учёбы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов было на четвёртом курсе?

1287. Предание повествует, что царь Гиерон поручил мастеру изготовить корону и приказал выдать ему необходимое количество золота и серебра. Когда корона была доставлена, взвешивание показало, что она весит столько же, сколько весили золото и серебро. Однако правителю донесли, что мастер утаил часть золота, заменив его серебром. Гиерон призвал Архимеда и предложил ему определить, сколько золота и серебра заключает изготовленная корона. Архимед решил задачу, исходя из того, что чистое золото при взвешивании в воде теряет двадцатую долю своего веса, а серебро — десятую долю. Определите, сколько золота утаил мастер, если ему выдали 8 кг золота и 2 кг серебра, а корона весила в воде $9\frac{1}{4}$ кг.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А**бсолютная величина числа 48
Абсцисса точки 214
Величины обратно пропорциональные 18
— однородные 6
— прямо пропорциональные 18
Взаимно однозначное соответствие 211, 215
Выражение буквенное 127
График 219
Декارتова система координат 213
Диаграмма круговая 31
— столбчатая 217
Длина окружности 208
— отрезка 204
Дробь десятичная 142
— — — бесконечная непериодическая 198
— — — периодическая 192
— — — конечная 188
Дробь отрицательная 87
Зеркальная симметрия 180
Знак приближённого равенства 169
Значение буквенного выражения 128
Координата точки 211
Координатная плоскость 213
Координатные полуоси (положительная и отрицательная) 75
— углы (четверти) 214
Координаты точки 214
Корень уравнения 120
Масштаб 9
— численный 9
Модуль числа 48
Начальная точка 74
Ордината точки 214
Основное свойство дроби 90
— — пропорции 15
Ось абсцисс 213
— координатная 74, 210
— ординат 213
— симметрии 133
Отношение 5
Параллелограмм 44
Плотность вещества 6
Плоскость симметрии 181
Площадь круга 208
Приближение десятичных дробей 169
— с избытком (сверху) 169
— с недостатком (снизу) 169
— с округлением 169
Промилле 42
Пропорция 14
Процент 23
Проценты простые 164
— сложные 165
Разряды десятичной дроби 143
Ряд целых чисел 46
Симметрия относительно плоскости 180
— — прямой 132
— — точки 76
События равновозможные 37
Среднее арифметическое нескольких чисел 116
Степень числа 62
Трапеция 44
Угол полный 31
— центральный 31
Уравнение 120
Фигура, симметричная относительно прямой 134
— — — точки 77
Фигуры, симметричные относительно прямой 134
— — — точки 77
Формула 128
Формула простых процентов 164
— сложных процентов 165
Центр симметрии 80
Цифра значащая 170
Числа взаимно обратные 103
— действительные 199
— иррациональные 199
— противоположные 47, 87
— рациональные 90
— целые 46
Число π 208
Члены отношения 5
— пропорции 15

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

10. а) $\frac{5}{4}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{7}{12}$. 27. 1 : 3000; 180 м. 36. а) 500 и 400 р.; б) 360 и 540 р. 39. 50 и 40 страниц. 42. 45 и 15 км. 43. 15 000 р. 53. а) $\frac{6}{7}$; б) $1\frac{1}{5}$; в) $8\frac{2}{5}$; г) $4\frac{1}{2}$. 57. а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 70; г) $\frac{1}{4}$. 74. 18 кг. 77. а) За 4 дня; б) за 40 дней. 78. $110\frac{1}{4}$ м. 79. 16 косцов. 81. 540 км. 82. а) За 6 ч; б) за 8 дней. 91. а) 6 ч 50 мин; б) 36 км/ч. 105. а) $7\frac{1}{5}$ т; б) $5\frac{2}{5}$ т; в) 90 т. 106. $9\frac{1}{10}$ т. 107. 248 г олова и 152 г свинца. 115. а) 800 лампочек; б) 300 семян. 117. 80 %; 125 %. 119. а) 48 %; б) 52 %. 122. б) 192 мальчика. 126. 40 деталей. 127. а) 20 км. 144. а) 13, 19, 31, 39, 91, 93; б) 11, 13, 19, 31, 33, 39, 91, 93, 99. 145. а) 10, 15, 50, 51; б) 10, 11, 15, 50, 51, 55. 148. 24 способами. 151. в) 120; 118. 152. а) 24 способами; б) 24 способами; в) 12 способами. 153. 8 способами. 154. 8 способами. 157. 28 партий. 158. Трёх приятелям. 159. а) Двум; б) трём; в) четырём. 161. 7 или 15. 162. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$. 164. а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{5}{7}$. 166. $\frac{1}{2}$. 167. $\frac{1}{6}$. 168. $\frac{1}{24}$. 169. $\frac{1}{12}$. 171. а) $\frac{1}{28}$; б) $\frac{1}{14}$; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{1}{14}$. 172. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{2}{3}$. 173. а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{36}$; г) 0; д) 0; е) 1. 174. $\frac{2}{3}$. 175. Нет. Из четырёх возможных случаев ОО, ОР, РО, РР один благоприятен для первого игрока и два — для второго. 178. а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{60}$; в) $\frac{1}{120}$. 180. За 7 недель. 182. 48 яиц. 183. 1 кг. 184. 80 окон. 189. На 21 %. 190. На 19 %. 191. Понизилась на 1 %. 192. Понизилась на 1 %.

ГЛАВА 2

222. а) 13; б) 17; в) 13; г) 17. 241. а) -528, -400, 0, 236, 400. 242. а) 367, 12, 0, -8, -250, -400. 256. а) 1; б) 3; в) -3. 259. а) -200; б) -200; в) -140; г) 1645; д) -290; е) 1432. 274. в) 0. 275. б) -50. 279. а) 19; б) -3. 287. б) -2; в) -6; г) -15. 288. б) -12; в) -7; г) -22. 298. а) 10; б) -101; в) 6; г) -50. 301. а) -30; б) -56. 310. а) -585; б) -11 040; в) 4040. 319. а) 1; б) -1; в) 1; г) -1. 323. а) 108; б) 9. 328. а) 12; б) 108; в) -81. 329. а) 6; б) 10. 339. а) -5; б) -5; в) -8; г) 90; д) 8; е) -8. 342. б) -3863; в) 15 246; г) -611; д) -262. 343. а) -114 336. 346. а) 27 600; б) 9800. 353. а) 56; б) 6; в) -1000; г) 2500; д) -83; е) -225. 361. а) -100; б) -1000; в) 3000; г) -10 000. 372. а) 356; б) -628. 381. а) 9; б) 143; в) 7; г) 77. 385. а) -200; б) 200; в) 200; г) -500. 414. Например, -10, 11, -10, 11, -10. 420. а) 7; б) 12; в) 11; г) 3. 424. Нет. 434. а) 6 дней; б) 75 пряников; в) через 6 ч; г) 60 аршин.

ГЛАВА 3

464. а) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{7}{8}$; м) $\frac{1}{4}$. 466. а) -1; б) -16; в) -6. 489. $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$.
492. Существуют, например: $-\frac{11}{50}$, $-\frac{6}{25}$, $-\frac{3}{10}$. 500. а) $1\frac{4}{9}$; б) $\frac{9}{25}$; в) $1\frac{61}{64}$.
513. а) $-\frac{8}{15}$; б) $-\frac{7}{8}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$. 526. а) $\frac{32}{63}$; б) $1\frac{5}{9}$; в) $1\frac{11}{24}$; г) $-\frac{9}{25}$; д) $\frac{9}{52}$;
- е) $-\frac{40}{63}$. 535. а) $\frac{27}{25}$; б) $1\frac{1}{5}$; в) $-1\frac{4}{5}$; г) $-\frac{7}{9}$. 550. а) 1; б) $1\frac{1}{2}$; в) 4; г) $1\frac{1}{8}$.
554. б) $-1\frac{37}{700}$; в) $-\frac{15}{26}$. 561. а) $-9\frac{21}{40}$; б) $\frac{43}{60}$; в) $-3\frac{1}{150}$; г) $\frac{3}{4}$. 568. а) $-3\frac{2}{3}$;
- б) $-25\frac{1}{2}$; в) $-4\frac{5}{9}$; г) $-1\frac{2}{3}$; д) $11\frac{1}{3}$; е) $1\frac{14}{15}$. 588. а) $-17\frac{29}{30}$; б) $-2\frac{2}{3}$.
604. в) $\frac{13}{16}$; г) $1\frac{11}{24}$. 606. а) $2\frac{2}{3}$; б) $5\frac{1}{3}$; в) 13; г) -4. 624. а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{12}$;
- в) $-\frac{1}{8}$; г) 6; д) $1\frac{1}{3}$; е) 9; ж) 0; з) $-\frac{2}{25}$; и) $\frac{2}{3}$. 627. д) 6; е) $\frac{1}{2}$; ж) $14\frac{2}{7}$.
635. а) $x+6+x=18$; б) $x-6+x=18$. 638. а) 18 и 6 грибов; б) 21 и 42 книги.
640. а) 16 цыплят; б) 12 утят. 641. а) 56 и 68 м; б) $7\frac{1}{2}$ и $8\frac{1}{2}$ м.
646. 5 кошек. 647. 6 собак и 4 кошки. 651. 36 учеников. 652. 28 учеников.
658. б) 11; в) -2; г) -3; д) 17. 659. а) 4; б) -6; в) 4; г) 5.
660. а) $\frac{9}{20}$; б) $3\frac{3}{5}$; в) 1. 663. $P=2(a+b)$; а) 10 см; в) 10 см. 666. $V=abc$;
- а) 30 см^3 ; б) 8 см^3 . 670. а) 135 км; б) за 4 ч. 671. а) 6 ч; б) 8 окон.
673. а) $(50x+8)\text{ км}$; б) $\frac{190-4x}{4}$ ч. 674. $\frac{ab}{a+b}$ мин; а) 12 мин; б) 21 мин.
680. а) 25 и 12; б) 30 и 18. 708. 1000 км; не может. 716. 2376 дахеканов.
721. 150 золотых. 722. Указание. Сначала вычислите, какая часть запаса топлива тратится на 1 км пути по течению и обратно. 723. 9600 км.

ГЛАВА 4

738. а) 1,79 м; б) 1,12 р.; в) $0,06\text{ дм}^2$; г) $0,026\text{ м}^2$; д) $2,31\text{ км/с}$;
- е) $2,4\text{ км/ч}$. 751. Например: а) 0,61; б) 0,482; в) 0,653. 765. а) 2,6; б) 4,88; в) 2,92; г) 12,6; д) 8,05; е) 8,13. 766. а) 13 см. 768. а) 144 см; б) 10,5 см; в) 11,4 см. 769. $30,7\text{ м}^2$. 774. 1288,4 р. 776. $20,5\text{ км/ч}$;
786. а) 48,4 дм; б) 35 дм; в) 39,67 дм; г) 0,25 дм. 803. а) 171,18; б) 1723,8; в) 5,4208. 821. а) 0,06; б) 0,04; в) 0,0002; г) 0,0005; д) 0,005; е) 0,0025.
832. а) 4,7225; б) 21,481. 839. 160 рельсов. 840. 3,8 и 4,5 т. 843. 14,8 и 20 м^2 . 845. 17,5 р. 846. 3,6, 4,5 и 5,4 км. 849. а) 5,5; б) 20. 851. а) 0,85; б) 0,65; в) 20; г) 10,5. 858. 50 кг, 90 кг, 1,125 т; 75%. 859. 140 кг, 122,5 кг, 0,63 т. 862. 168 р. 865. Нет. 867. а) В 1,44 раза; на 44%; б) на 19%.
891. а) -0,5; б) 0,094; в) -0,255; г) -17,81. 893. а) -4; б) 3; в) -1,6.
894. а) $-1\frac{29}{36}$; б) $-\frac{2}{15}$; в) $-53\frac{1}{3}$; г) $3\frac{1}{7}$. 895. а) -0,125; б) $-\frac{8}{15}$; в) -41.
900. а) 0,345; б) 0,765; в) 0,023; г) -0,344. 901. а) 1,24; б) 3,57; в) 2,58; г) 2,56. 902. а) 1,25; б) 1,24; в) -7,02; г) 0,13. 911. а) $a+b \approx 3,4$; $a-b \approx 3,2$;

б) $a + b \approx 1,3$; $a - b \approx -3,9$; в) $a + b \approx 0,2$; $a - b \approx -0,2$. **913.** а) $ab \approx -4,68$; $a : b \approx -1,27$; б) $ab \approx 1,69$; $a : b \approx 2,73$; в) $ab \approx 0,0198$; $a : b \approx 229$. **922.** а) 180; б) 297 мальчиков. **926.** 4000. **933.** На 33,1%. **934.** За 4 года. **946.** За 25 мин. **954.** 15 лет. **955.** а) 12 лет; б) 10 лет.

ГЛАВА 5

959. а) 2; б) 2 и 3; в) 2 и 7; г) 2 и 3. **966.** а) 19,575; б) 12,96; в) 5; г) 2,15; д) 0,55; е) 4; ж) 2,01; з) 5,2. **982.** а) Не больше 6 цифр. **984.** г) $3\frac{5}{9}$;
 д) $\frac{11}{90}$; е) $\frac{337}{300}$. **1003.** а) Для $a \geq 0$; б) для $a \leq 0$. **1008.** а) 7,06; б) 4,63;
 в) 12,68; г) 12,77. **1009.** а) 4,144; б) 8,428; в) 5,545; г) -3,559. **1010.** а) 16;
 б) 0,18; в) 56; г) 13. **1027.** а) 3; 3,1; 3,12; б) 2; 2,3; 2,31; в) 3; 3,6; 3,61.
1028. а) 3,1; 3,19; 3,191; 3,1919. **1038.** Они равны. **1040.** $(8\pi - 16) \text{ см}^2$.
1043. Пролетет. **1069.** (0; 1). **1070.** (-3; 0). **1092.** На $11\frac{1}{9}\%$. **1093.** 35,5%.
1094. 5 ч. **1101.** 4 и 4,5 ч. **1102.** $1\frac{1}{9}$ динара. **1103.** 9,2 флорина. **1104.** 4,8 р.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1110. б) 198; в) 612 715; г) 679. **1114.** а) 465; б) 318. **1116.** а) 4; б) 5.
1117. а) 77436; б) 709; в) 357035; г) 126. **1122.** а) -2; б) 10; в) -753; г) 7.
1123. а) 330; б) 64; в) -99; г) 5100. **1134.** а) $1\frac{11}{12}$; б) $1\frac{13}{15}$; в) $18\frac{8}{21}$; г) $4\frac{1}{13}$.
1145. б) 405; в) 2997; г) 13; д) 72. **1148.** а) $x=4$, $y=3$, $z=2$. **1153.** а) -6;
 б) 90. **1157.** а) $\frac{16}{75}$; б) 0,34. **1158.** а) $7\frac{1}{7}$; б) $1\frac{3}{28}$; в) $11\frac{4}{7}$. **1161.** а) 3,8; б) $3\frac{1}{3}$;
 в) 17; г) 15. **1162.** а) 14,3; б) $1\frac{1}{18}$. **1177.** Не хватит. **1178.** 291 и 363 кг.
1179. 220 и 232. **1180.** 33 т. **1181.** 22 дня. **1182.** 2 ч. **1183.** За 3 ч. **1184.** 78 р.,
 42 р. и 24 р. **1185.** 99 р., 51 р., 27 р. и 15 р. **1190.** За 24 с. **1192.** а) 3,5 мин;
 б) 16,5 мин. **1193.** а) Через 3,5 ч или через 4,5 ч. **1209.** Хватит. **1211.** За
 1,2 ч. **1212.** На 8 дней. **1213.** За 75 мин. **1217.** 69 страниц. **1224.** а) $\frac{15}{17}$;
 б) $\frac{21}{13}$. **1226.** а) 0,5 р.; б) 9,5 р. **1231.** $2\frac{2}{3}$ т. **1232.** Догонит. **1233.** г) 8 косцов.
1234. По 15 ч в день. **1243.** 8 жуков, 4 паука. **1244.** 20 кг по 90 центов и
 30 кг по 60 центов. **1247.** 50 га. **1248.** 510 приборов за 17 дней. **1249.** 300 ма-
 шин. **1250.** 60 тетрадей и 24 учащихся. **1251.** 40 учеников, 8 р. **1256.** 6 и 2
 дня. **1257.** 200 деревьев. **1258.** 700 р. **1260.** 36 учащихся. **1261.** 7 ч 30 мин.
1262. 4, 14 и 10 м. **1263.** 4 года. **1264.** 48 лет. **1265.** 36 гусей. **1266.** 15 ма-
 рок. **1267.** а) Через 4 года; б) 2 года назад. **1269.** а) 3 года; б) 15 и 5 лет.
1270. а) Через 12 лет; б) 6 лет назад. **1271.** 30 и 40 л. **1272.** 10 и 14 слив.
1273. 40 и 170 рупий. **1274.** 7 и 5 мешков. **1276.** 28 лет и 42 года.
1281. а) 784 см^2 ; $1,95 \text{ дм}^3$. **1283.** $1,107 \text{ дм}^3$. **1286.** 8 экзаменов. **1287.** Мастер
 утаил 3 кг золота.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОТНОШЕНИЯ, ПРОПОРЦИИ, ПРОЦЕНТЫ

1.1. Отношения чисел и величин	5
1.2. Масштаб	9
1.3. Деление числа в данном отношении	12
1.4. Пропорции	14
1.5. Прямая и обратная пропорциональность	18
1.6. Понятие о проценте	23
1.7. Задачи на проценты	28
1.8. Круговые диаграммы	31

Дополнения к главе 1

1. Задачи на перебор всех возможных вариантов	33
2. Вероятность события	36
3. Исторические сведения	41
4. Занимательные задачи	42

ГЛАВА 2. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

2.1. Отрицательные целые числа	45
2.2. Противоположные числа. Модуль числа	47
2.3. Сравнение целых чисел	50
2.4. Сложение целых чисел	52
2.5. Законы сложения целых чисел	55
2.6. Разность целых чисел	58
2.7. Произведение целых чисел	61
2.8. Частное целых чисел	65
2.9. Распределительный закон	67
2.10. Раскрытие скобок и заключение в скобки	70
2.11. Действия с суммами нескольких слагаемых	73
2.12. Представление целых чисел на координатной оси	74

Дополнения к главе 2

1. Фигуры на плоскости, симметричные относительно точки	76
2. Исторические сведения	82
3. Занимательные задачи	83

ГЛАВА 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

3.1. Отрицательные дроби	87
3.2. Рациональные числа	90
3.3. Сравнение рациональных чисел	94
3.4. Сложение и вычитание дробей	97
3.5. Умножение и деление дробей	101
3.6. Законы сложения и умножения	106
3.7. Смешанные дроби произвольного знака	109
3.8. Изображение рациональных чисел на координатной оси	114
3.9. Уравнения	120
3.10. Решение задач с помощью уравнений	123

Дополнения к главе 3

1. Буквенные выражения	127
2. Фигуры на плоскости, симметричные относительно прямой	132
3. Исторические сведения	138
4. Занимательные задачи	138

ГЛАВА 4. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

4.1. Понятие положительной десятичной дроби	142
4.2. Сравнение положительных десятичных дробей	146
4.3. Сложение и вычитание положительных десятичных дробей	148
4.4. Перенос запятой в положительной десятичной дроби	151
4.5. Умножение положительных десятичных дробей	153
4.6. Деление положительных десятичных дробей	156
4.7. Десятичные дроби и проценты	162
4.8*. Сложные задачи на проценты	163
4.9. Десятичные дроби произвольного знака	167
4.10. Приближение десятичных дробей	169
4.11. Приближение суммы, разности, произведения и частного двух чисел	171

Дополнения к главе 4

1. Вычисления с помощью калькулятора	174
2. Процентные расчёты с помощью калькулятора	177
3. Фигуры в пространстве, симметричные относительно плоскости	180
4. Исторические сведения	184
5. Занимательные задачи	185

ГЛАВА 5. ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

5.1. Разложение положительной обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь	188
5.2. Бесконечные периодические десятичные дроби	191
5.3* . Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби ...	195
5.4. Непериодические бесконечные десятичные дроби	198
5.5* . Действительные числа	200
5.6. Длина отрезка	204
5.7. Длина окружности. Площадь круга	208
5.8. Координатная ось	210
5.9. Декартова система координат на плоскости	213
5.10. Столбчатые диаграммы и графики	217
Дополнения к главе 5	
1. Задачи на составление и разрезание фигур	223
2. Исторические сведения	226
3. Занимательные задачи	228
Задания для повторения	231
Предметный указатель	250
Ответы	251

Учебное издание
Серия «МГУ — школе»

**Никольский Сергей Михайлович, Потапов Михаил Константинович,
Решетников Николай Николаевич, Шевкин Александр Владимирович**

МАТЕМАТИКА

6 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования

Редакция математики и информатики

Зав. редакцией **Т. А. Бурмистрова**. Редактор **Т. Г. Войлокова**

Младший редактор **Е. В. Трошко**. Художники **О. П. Богомолова, А. Г. Воробьев**

Художественный редактор **О. П. Богомолова**

Компьютерная графика **А. Г. Вьюнковой**

Технический редактор и верстальщик **Е. А. Васильева**

Корректоры **П. А. Тимачёва, М. А. Терентьева, Л. С. Александрова**

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—
953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 18.04.14.

Формат 70 × 90^{1/16}. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная.

Уч.-изд. л. 14,02 + 0,48 форз. Тираж 15000 экз. Заказ №

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».

127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат».

ОАО «Издательство «Высшая школа»

214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70

E-mail: spk@smolpk.ru <http://www.smolpk.ru>



МГУ - ШКОЛЕ

Математика

6

 $\frac{1}{4}$

0,25

25%



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

